Zahlentheorie II - Aufgaben

Aktualisiert: 22. Februar 2017
vers. 1.4.0

1 Kongruenzen I

1. Ist $m > 1$ und a eine ganze Zahl, dann ist genau einer der Zahlen
$$a,\ a+1,\ a+2,\ \dots,\ a+m-1$$
durch m teilbar.
2. p, $p+4$ und $p+14$ sind Primzahlen. Finde p.
3. Sind x und y ungerade natürliche Zahlen, dann ist $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl.
4. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ gibt.
5. Gilt $9 \mid a^2 + ab + b^2$, dann sind a und b durch 3 teilbar.
6. Für welche ganzen Zahlen n ist $n^2 + 3n + 5$
   (a) durch 11 teilbar?
   (b) durch 121 teilbar?
7. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$, sodass gilt
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$
Zeige, dass $4 \mid n$.
8. (IMO 87) Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt mit
$$f(f(n)) = n + 1987.$$
9. (Russland 97) Finde alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.
10. (CH 03) Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$, zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit
$$5050 \mid (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

Die φ-Funktion und der Satz von Euler Fermat

1. (IMO 64)
   a) Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist.

b) Zeige, dass $2^n + 1$ nie durch 7 teilbar ist.

2. Zeige: $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
3. Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass $3 \mid n \cdot 2^n - 1$.
4. (IMO 78) Seien m und n natürliche Zahlen mit $m < n$. Die drei letzten Dezimalziffern von 1978^m und 1978^n sind dieselben. Finde m und n, sodass $m + n$ möglichst klein ist.
5. Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Zeige, dass n ein Teiler ist von $2^{n!} - 1$.
6. Ist n gerade, dann gilt $323 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$.
7. Finde alle natürlichen Zahlen x, y, z, t und n, für die gilt
$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$
8. Fermat hat behauptet, alle Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$ seien prim. Dies ist jedoch falsch, Euler hat als erster gezeigt, dass $641 \mid F_5$. Verifiziere dies.
9. Bestimme die zwei letzten Ziffern von $7^{7^{7^{7^7}}}$.

Der Chinesische Restsatz

1. Berechne $123^{45^{67}} + 8 \cdot 9^{10} \mod 420$.

Quadratische Reste und höhere Potenzen

1. Zeige, dass für jede Primzahl $p > 3$ gilt $p^2 \equiv 1 \ (24)$.
2. Zeige: Sind p und $p^2 + 2$ Primzahlen, dann ist auch $p^3 + 2$ prim.
3. $n \geq 2$. Sei $q = p_1 p_2 \cdots p_n$ das Produkt der ersten n Primzahlen. Zeige, dass $q-1$ keine Quadratzahl ist.
4. (CH 98) Finde alle Primzahlen p, sodass $p^2 + 11$ genau 6 positive Teiler besitzt.
5. Ist $n \in \mathbb{N}$, sodass $2n + 1$ und $3n + 1$ beides Quadrate sind, dann gilt $40 \mid n$.
6. (MMO 1984) Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $19x^3 - 84y^2 = 1984$.
7. Für $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ gilt $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Zeige, dass mindestens drei der fünf Zahlen gerade sind, dass mindestens drei durch 5 teilbar sind und dass mindestens zwei mit der Ziffer 0 enden.
8. (CH 02) n sei eine positive ganze Zahl mit mindestens vier verschiedenen positiven Teilern. Die vier kleinsten unter diesen Teilern seien d_1, d_2, d_3, d_4. Finde alle solchen Zahlen n, für die gilt
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$
9. (IMO 86) Sei d eine positive ganze Zahl $\neq 2, 5, 13$. Zeige: In der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ gibt es zwei Elemente a, b, für die $ab - 1$ keine Quadratzahl ist.
10. (IMO 96) a, b sind natürliche Zahlen, sodass $15a + 16b$ und $16a - 15b$ beides Quadrate sind. Man bestimme den kleinsten möglichen Wert, den das kleinere der beiden Quadrate annehmen kann.
11. Zeige, dass 19^{19} nicht die Summe einer dritten und einer vierten Potenz ist.

2 Faktorisierungen

1. Zeige, dass für alle ganzen Zahlen n gilt $30 \mid n^5 - n$.
2. Ist n keine Primzahl, dann ist auch $2^n - 1$ nicht prim. Besitzt n einen ungeraden Faktor > 1, dann ist $2^n + 1$ nicht prim.
3. (IMO 68) Zeige, dass es unendlich viele natürlichen Zahlen m gibt, sodass $n^4 + m$ für keine natürliche Zahl n prim ist.
4. Zeige, dass für $n > 2$ die Zahl $2^{2^n-2} + 1$ nie prim ist.
5. Gibt es Primzahlen p, q, r mit $p^2 + q^3 = r^4$?
6. (Österreich 95) Wieviele a) gerade b) ungerade natürliche Zahlen n gibt es, sodass n ein Teiler ist von $3^{12} - 1$, nicht aber von $3^k - 1$ für $k = 1, 2, \ldots, 11$?
7. Finde alle positiven ganzen Lösungen der Gleichung
$$|3^x - 2^y| = 1.$$
8. Mehrere verschiedene ganze Zahlen liegen zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen. Zeige, dass ihre paarweisen Produkte alle verschieden sind.
9. Finde alle natürlichen Zahlen x, y, z, sodass gilt
$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 189.$$
10. Ist $4^{545} + 545^4$ eine Primzahl?
11. Zeige, dass die Gleichung $y^2 = x^3 + 7$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt.
12. (CH 03) Finde die grösste natürliche Zahl n, die für jede ganze Zahl a ein Teiler ist von $a^{25} - a$.
13. Sei $n \geq 1$. Zeige, dass $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ mindestens n verschiedene Primteiler besitzt.
14. Finde alle positiven ganzen Lösungen der Gleichung
$$3^x + 4^y = 5^z.$$
15. Zeige, dass die Zahl $(5^{125} - 1)/(5^{25} - 1)$ zusammengesetzt ist.
16. Beweise, dass die Zahl 1280000401 zusammengesetzt ist.
17. Ist $4^n + 2^n + 1$ eine Primzahl, dann ist n einer Dreierpotenz.
18. (CSO 95) Sei p eine ungerade Primzahl. Finde alle Paare x, y nichtnegativer ganzer Zahlen, sodass gilt
$$p^x - y^p = 1.$$

3 Ziffern und Zahlsysteme

Zahlen und ihre Ziffern

1. Die vierstellige Zahl $aabb$ ist ein Quadrat. Wie lautet sie?
2. Ist eine Zahl der Form $\underbrace{111\ldots11}_{n}$ prim, dann ist n prim.
3. Zeige, dass in der Folge $1, 31, 331, 3331, \ldots$ unendlich viele zusammengesetzte Zahlen vorkommen.
4. Zeige, dass $1982 \,|\, 222\ldots22$ (1982 Zweien).
5. (IMO 60) Finde alle dreistelligen, durch 11 teilbaren natürlichen Zahlen N, sodass $N/11$ gleich der Summe der Quadrate der Ziffern von N ist.
6. Finde alle vierstelligen Zahlen $abcd$, sodass gilt $4 \cdot abcd = dcba$.
7. (England 96) Das Paar
$$(M, N) = (3600, 2500)$$
hat viele Eigenschaften. Beide Zahlen sind vierstellig und es gibt genau zwei Stellen wo in M und N dieselbe Ziffer steht. An den beiden anderen Stellen ist die Ziffer in M um genau 1 grösser als jene in N. Ausserdem sind beides Quadrate. Finde alle Paare (M, N) vierstelliger Zahlen mit all diesen Eigenschaften.
8. Die Dezimaldarstellung von A besteht aus 600 Sechsen und einigen Nullen. Kann A eine Quadratzahl sein?
9. Zeige
$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} = \underbrace{22\ldots2}_{n} + (\underbrace{33\ldots3}_{n})^2.$$
10. Für eine natürliche Zahl n bezeichne $\overline{n}$ die Zahl, die man erhält, wenn man die Reihenfolge der Ziffern von n umkehrt (z.B. $n = 1623$, $\overline{n} = 3261$). Für k gelte $k \,|\, \text{n} \Longrightarrow k \,|\, \overline{n}$ für alle n. Zeige $k \,|\, 99$.
11. (IMO 62) Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die mit der Ziffer 6 endet, sodass die Zahl viermal so gross wird, wenn man die letzte Ziffer an den Anfang der Zahl verschiebt.
12. (Südafrika 97) Finde alle natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass wenn man die erste Ziffer ans Ende der Zahl verschiebt, dann ist das Resultat $3\frac{1}{2}$ mal so gross wie die ursprüngliche Zahl.
13. (Shortlist 90) Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass jede Zahl, die im Dezimalsystem geschrieben aus $n-1$ Einsen und einer Sieben besteht, prim ist.

Darstellung einer Zahl in Basis b

1. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ und
$$f(n) = \begin{cases} 1 + f(\frac{n-1}{2}), & n \text{ ungerade,} \\ 1 + f(\frac{n}{2}), & n \text{ gerade.} \end{cases}$$
2. (IMO 88) Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gelte $f(1) = 1, f(3) = 3$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$

(a) $f(2n) = f(n)$,

(b) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$,

(c) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Finde die Anzahl $n \leq 1988$ mit $f(n) = n$.

3. (China 95) Nehme an, für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gelte $f(1) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

   (a) $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1 + 3f(n))$,

   (b) $f(2n) < 6f(n)$.

   Finde alle Lösungen der Gleichung $f(k) + f(m) = 293$.

4. (IMO 70) Es gelte $0 \leq x_i < b$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ und ausserdem $x_n, x_{n-1} > 0$. Sei $a > b$ und $x_n x_{n-1} \ldots x_0$ sei in Basis a gelesen die Zahl A und in Basis b gelesen die Zahl B. Ähnlich sei $x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0$ in Basis a gelesen die Zahl A' und in Basis b gelesen die Zahl B'. Zeige, dass gilt $A'B < AB'$.

5. (USA 96) Entscheide, ob es eine Menge X ganzer Zahlen gibt, sodass die Gleichung $a + 2b = n$ für jede ganze Zahl n genau eine Lösung mit $a, b \in X$ hat.