Zahlentheorie I - Tipps

Aktualisiert: 10. November 2018
vers. 1.3.0

1 Teilbarkeit

Einstieg

1.1 Zeige, dass 900 ein Teiler von 10! ist.

Tipp: Schreibe 900 als Produkt von *verschiedenen* Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

1.2 Das Produkt zweier Zahlen, von denen keine durch 10 teilbar ist, beträgt 1000. Bestimme die Summe dieser Zahlen.

Tipp: Betrachte zuerst die Primfaktorzerlegung von 1000. Was kann man damit über die Primfaktorzerlegungen der beiden Zahlen sagen?

1.3 Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass n ein Teiler von $n^2 + 3n + 27$ ist.

Tipp: n teilt offensichtlich die ersten beiden Summanden von $n^2+3n+27$. Wie sieht es mit dem dritten Summanden aus?

Fortgeschritten

1.4 Zeige:

(a) $5 \cdot 17 \mid 5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8$

(b) $n(n+m) \mid 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3$

Tipp: Forme die rechte Seite geschickt um.

1.5 Bestimme drei dreistellige natürliche Zahlen, in deren Darstellung 9 verschiedene Ziffern vorkommen, sodass ihr Produkt mit vier Nullen endet.

Tipp: Eine natürliche Zahl, welche mit vier Nullen endet, ist durch 10000 teilbar. Betrachte zuerst die Primfaktorzerlegung von 10000.

1.6 (a) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 41 Teiler haben und durch 41 teilbar sind.

(b) Bestimme alle natürliche Zahlen, die genau 42 Teiler haben und durch 42 teilbar sind.

Tipp: Schliesse mit einem kombinatorischen Argument von der Primfaktorzerlegung einer Zahl auf deren Anzahl Teiler.

Olympiade

1.7 Finde alle natürlichen Zahlen n mit $n+1 \mid n^2+1$.

Tipp: Versuche, den Grad von n auf der rechten Seite zu reduzieren.

1.8 Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es n aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine prim ist.

Tipp: Finde zuerst für jedes n eine natürliche Zahl, welche durch alle Zahlen in $\{1, 2, \ldots, (n+1)\}$ teilbar ist.

1.9 Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, sodass $2n$ ein Quadrat, $3n$ eine dritte Potenz und $5n$ eine fünfte Potenz ist.

Tipp: Konstruiere zuerst nur eine solche Zahl und zeige dann, dass du daraus unendlich viele weitere kriegst.

2 ggT und kgV

Einstieg

2.1 (IMO 59) Zeige, dass sich folgender Bruch nicht kürzen lässt:

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

Tipp: Benutze den Euklid'schen Algorithmus, um $\operatorname{ggT}(21n+4, 14n+3)$ zu berechnen.

2.2 Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit

$$\operatorname{kgV}(a, b) = 10 \operatorname{ggT}(a, b)$$

Tipp: Sei $d = \operatorname{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = dm$, $b = dn$ mit $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$. Dann gilt $\operatorname{kgV}(a, b) = dmn$. Setze dies in die ursprüngliche Gleichung ein.

Fortgeschritten

2.3 Jede natürliche Zahl $n > 6$ ist die Summe zweier teilerfremder natürlicher Zahlen > 1.

Tipp: Unterscheide, ob n gerade oder ungerade ist. Versuche dann in beiden Fällen, n explizit als solche Summe hinzuschreiben.

2.4 Wir nennen natürliche Zahlen a und b *befreundet*, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist. Beweise, dass wenn a und b befreundet sind, dann sind auch a und $ggT(a, b)$ befreundet.

Tipp: Sei $d = \text{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = dm$, $b = dn$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$. Wann ist das Produkt zweier teilerfremder Zahlen eine Quadratzahl?

Olympiade

2.5 Seien m und n zwei natürliche Zahlen, deren Summe eine Primzahl ist. Zeige, dass m und n teilerfremd sind.

Tipp: Führe einen indirekten Beweis: Nehme an, dass m und n nicht teilerfremd sind und versuche zu zeigen, dass deren Summe nicht prim ist.

2.6 (Kanada 97) Bestimme die Anzahl Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit $x \leq y$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\text{ggT}(x, y) = 5! \text{ und } \text{kgV}(x, y) = 50!$$

Tipp: Betrachte die Primfaktoren von 50!

3 Abschätzungen

Einstieg

3.1 Wir nennen ein Rechteck *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Fläche und den Umfang des Rechtecks übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Rechtecke.

Tipp: Seien a, b die Seiten eines Rechtecks. Wenn a und b beide wachsen, was wird dann schneller gross: die Fläche oder der Umfang des Rechtecks?

3.2 Finde alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

Tipp: Was passiert, wenn x und y beide gross werden? Finde aufgrund dieser Beobachtung eine obere Schranke für x und y.

Fortgeschritten

3.3 Wir nennen einen Quader *schön*, wenn die Längen der Seiten natürliche Zahlen sind und die Masszahlen für die Oberfläche und das Volumen des Quaders übereinstimmen. Bestimme alle *schönen* Quader.

Tipp: Schaue Aufgabe 3.1 noch einmal an.

3.4 Finde alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

Tipp: Schaue Aufgabe 3.2 noch einmal an.

3.5 Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass $n^2 + 1$ ein Teiler von $n^7 + 13$ ist.

Tipp: Betrachte $n^2 + 1 \mid n^7 + 13$ und versuche zuerst, den Grad von n auf der rechten Seite zu reduzieren.

Olympiade

3.6 Zeige, dass die Gleichung

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

keine Lösung in den positiven ganzen Zahlen besitzt.

Tipp: Versuche, die rechte Seite zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten einzuklemmen.

3.7 Finde alle natürlichen Zahlen x, für die gilt

$$x! = x^2 + 11x - 36$$

Tipp: Wenn x grösser wird, wächst die linke Seite viel schneller als die rechte Seite. Ab welchem Wert für x ist die linke Seite immer grösser als die rechte Seite?

3.8 (IMO 98) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (a, b), sodass $a^2b + a + b$ durch $ab^2 + b + 7$ teilbar ist.