Exercices Théorie des nombres I

Actualisé: 15 octobre 2016
vers. 1.0.0

1 Divisibilité

Mise en jambes

1.1 Montrer que 900 divise $10\,!$.
Indice : Écrit 900 comme le produit de nombres *distincts* parmi $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Solution :

$$900 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10 \,|\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

1.2 Le produit de deux nombres, dont aucun n'est divisible par 10, vaut 1000. Déterminer la somme de ces nombres.
Indice : Considère d'abord la décomposition en facteurs premiers de 1000. Que peut-on dire de la décomposition en facteurs premiers des deux nombres ?

Solution : Nous désignons les deux nombres par a et b. La décomposition en facteurs premiers de 1000 est $1000 = 2^3 5^3$. Il s'ensuit que

$$a = 2^k 5^l \text{ und } b = 2^{3-k} 5^{3-l}$$

pour deux nombres naturels $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Maintenant, si les deux nombres k et l sont strictement plus grands que 0, alors a est divisible par 10, ce qui est une contradiction. D'autre part, si l et l sont strictement plus petits que 3, alors b est divisible par 10, ce qui est également impossible. Ainsi, nous avons que (k, l) est soit $(3, 0)$, soit $(0, 3)$. Dans le premier cas, nous avons $a = 8$ et $b = 125$. Dans le deuxième cas, $a = 125$ et $b = 8$. Dans les deux cas, nous avons alors $a + b = 133$.

1.3 Trouver tous les nombres naturels n, tels que n est un diviseur de $n^2 + 3n + 27$.
Indice : Évidemment n divise les deux premiers termes de $n^2+3n+27$. Qu'en est-il du troisième ?

Solution : Comme n divise les deux premiers termes de $n^2 + 3n + 27$, nous avons

$$n \,|\, n^2 + 3n + 27 \Leftrightarrow n \,|\, 27.$$

Comme $27 = 3^3$,La deuxième condition est alors vérifiée si et seulement si $n \in \{1, 3, 9, 27\}$. Ainsi n est un diviseur de $n^2 + 3n + 27$ si et seulement si $n \in \{1, 3, 9, 27\}$.

Avancé

1.4 Montrer que :

(a) $5 \cdot 17 \mid 5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8$

(b) $n(n+m) \mid 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3$

Indice : Réécris le côté droit sous une meilleure forme.

Solution :

(a) Le côté droit peut être réécrit comme suit :

$$5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8 = 5^2 \cdot 17 + 5 \cdot 3(9+8) = 5^2 \cdot 17 + 5 \cdot 3 \cdot 17 = 5 \cdot 17(5+3)$$

La dernière expression est évidemment divisible par $5 \cdot 17$.

(b) De nouveau nous réécrivons le côté droit :

$$\begin{aligned} 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3 &= n^2(3m + am + 3n + an) \\ &= n^2\left((3+a)m + (3+a)n\right) \\ &= (3+a)n^2(m+n) \\ &= n(n+m)\left((3+a)n\right). \end{aligned}$$

Ici aussi, on voit tout de suite que la dernière expression est divisible par $n(n+m)$.

1.5 Déterminer trois nombres naturels à trois chiffres dont la représentation décimale emploie neuf chiffres différents tels que leur produit se termine par quatre zéros.

Indice : Un nombre naturel se terminant par quatre zéros est divisible par 10000. Considère d'abord la décomposition en facteurs premiers de 10000.

Solution : Nous construisons les trois nombres a, b, c de manière à ce que $10 \mid a$, $2^3 \mid b$ et $5^3 \mid c$. Ainsi nous aurions, comme souhaité,

$$10000 = 10 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \mid abc.$$

Nous posons d'abord $c = 125$ et cherchons a un multiple de 10 et b un multiple de 8 tels que tous les chiffres sont différents. Une solution est par exemple $b = 864 = 108 \cdot 8$ et $a = 370 = 37 \cdot 10$. Au final, nous obtenons les trois nombres $(370, 864, 125)$.

1.6 (a) Déterminer tous les nombres naturels qui ont exactement 41 diviseurs et qui sont divisibles par 41.

(b) Déterminer tous les nombres naturels qui ont exactement 42 diviseurs et qui sont divisibles par 42.

Indice : Grâce à un argument de combinatoire, trouve le nombre de diviseurs d'un nombre selon sa décomposition en facteurs premiers.

Solution :

(a) Considérons la décomposition en facteurs premiers du nombre cherché

$$41^n \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

avec $p_1, \dots, p_k$ les différents facteurs premiers distincts de 41. Puisque le nombre doit être divisible par 41, nous avons $n \geq 1$. De plus, le nombre a exactement $(n+1)(\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1)$ diviseurs distincts. Nous obtenons donc l'équation

$$41 = (n+1)(\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1).$$

Puisque 41 est un nombre premier, et par l'hypothèse que $(n+1) \geq 2$, nous obtenons $(n+1) = 41$ et $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Ainsi, 41^{40} est le seul nombre qui vérifie la condition.

(b) Nous commençons par rappeler que $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Par un raisonnement analogue à celui de la partie (a), nous remarquons que la décomposition en facteurs premiers du nombre cherché est donnée par

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$$

avec $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 42$. Pour assurer la divisibilité par 42, il faut que α, β et γ soient au minimum 1. Puisque la seule factorisation de 42 en facteurs non triviaux est donnée par $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, les solutions sont les six nombres suivants :

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7^6,\ 2 \cdot 3^6 \cdot 7^2,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 7^6,\ 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7,\ 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2,\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Olympiade

1.7 Trouver tous les nombres naturels n tels que $n+1 \mid n^2+1$.
Indice : Essaye de réduire le degré de n dans le côté droit.

Solution : Par supposition, nous avons $n+1 \mid n^2+1$ et naturellement nous avons aussi $n+1 \mid n(n+1) = n^2+n$. Ainsi $n+1$ divise aussi la différence :

$$n+1 \mid \big(n^2+n\big) - \big(n^2+1\big) = n-1.$$

Pour $n > 1$, nous avons $n+1 > n-1 > 0$ et donc dans ce cas $n+1$ ne peut pas être un diviseur de $n-1$. Ainsi, $n = 1$ est l'unique possibilité et effectivement dans ce cas $2 \mid 2$.

1.8 Montrer que quelque soit n un nombre naturel, il existe n nombres naturels consécutifs tels qu'aucun d'eux n'est premier.
Indice : Commence par trouver pour chaque n un nombre naturel qui est divisible par tous les nombres dans $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$.

Solution : Considérons l'ensemble suivant de n nombres naturels consécutifs :

$$M = \{(n+1)! + 2\ ,\ (n+1)! + 3\ ,\ \dots\ ,\ (n+1)! + (n+1)\}.$$

Par définition, $(n+1)!$ est divisible par tous les nombres naturels $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$. Nous montrons maintenant que aucun des nombres de M n'est premier. En effet, pour chaque $k \in \{2, 3, \dots, (n+1)\}$, le nombre $(n+1)! + k$ est divisible par k car k divise $(n+1)!$ et k.

1.9 Montrer qu'il existe une infinité de nombres naturels n, tels que $2n$ est un carré, que $3n$ est un cube et que $5n$ est une cinquième puissance.
Indice : Construis d'abord un seul tel nombre, et montre ensuite qu'à partir de celui-ci tu peux en obtenir une infinité.

Solution : Nous construisons d'abord un tel nombre ayant la forme $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$. Les trois conditions de l'exercice nous donnent les conditions suivantes de divisibilité pour α, β et γ :

$$\begin{array}{lll} 2 \mid \alpha+1 & 3 \mid \alpha & 5 \mid \alpha \\ 2 \mid \beta & 3 \mid \beta+1 & 5 \mid \beta \\ 2 \mid \gamma & 3 \mid \gamma & 5 \mid \gamma+1 \end{array}$$

Nous voyons que ces conditions sont vérifiées par exemple pour $\alpha = 15$, $\beta = 20$ et $\gamma = 24$. Ainsi, $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ est un tel nombre. Soit maintenant p un nombre premier différent de 2, 3 et 5. Alors le nombre $p^{30} \cdot 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ vérifie également la condition. Puisqu'il exists une infinité de nombres premiers, nous trouvons donc une infinité de tels nombres.

2 pgcd et ppcm

Mise en jambes

2.1 (IMO 59) Montrer que la fraction suivante est irréductible quelque soit n :

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

Indice : Utilise l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgdc}(21n+4, 14n+3)$.

Solution : Nous utilisons l'algorithme d'Euclide pour montre que le pgdc des deux nombres est 1 et donc que les deux nombres sont premiers entre eux :

$$\begin{aligned}(21n+4, 14n+3) &= ((21n+4) - (14n+3), 14n+3) \\ &= (7n+1, 14n+3) \\ &= (7n+1, (14n+3) - 2 \cdot (7n+1)) \\ &= (7n+1, 1) = 1.\end{aligned}$$

2.2 Trouver toutes les paires (a, b) de nombres naturels tels que

$$\text{ppmc}(a, b) = 10\,\text{pgdc}(a, b)$$

Indice : Soit $d = \text{pgdc}(a, b)$ et écrivons $a = dm$, $b = dn$ avec $\text{pgdc}(m, n) = 1$. Alors nous avons $\text{ppmc}(a, b) = dmn$. Remplace cela dans l'égalité de départ.

Solution : Soit $d = \text{pgdc}(a, b)$ et écrivons $a = dm$, $b = dn$ avec $\text{pgdc}(m, n) = 1$. Alors nous avons $\text{ppmc}(a, b) = dmn$ et donc $mn = 10$. Les solutions sont donc toutes de la forme $(a, b) = (dm, dn)$, avec d, m, n des nombres naturels, $\text{pgdc}(m, n) = 1$ et $mn = 10$. Au final, nous obtenons donc pour tous les nombres naturels d les solutions suivantes :

$$(d, 10d)\ ,\ (2d, 5d)\ ,\ (5d, 2d)\ ,\ (10d, d).$$

Avancé

2.3 Montrer que chaque nombre naturel $n > 6$ est la somme de deux nombres naturels > 1 premiers entre eux.

Indice : Différencie les cas n pair et n impair. Essaye ensuite dans les deux cas d'écrire explicitement n comme une telle somme.

Solution : Si n est impair, nous écrivons $n = 2k + 1$ pour un nombre naturel $k \geq 3$. Alors nous avons $n = (k + 1) + k$ avec $\text{pgdc}(k, k + 1) = 1$ et nous avons déjà terminé. Si n est pair, nous avons $n = 2k$ pour un nombre naturel $k > 3$. Dans ce cas, nous devons différencier les cas où k est pair et ceux où k est impair : si k est pair, alors $k - 1$ est impair et nous écrivons $n = (k - 1) + (k + 1)$. En effet, nous avons alors $\text{pgdc}(k - 1, k + 1) = \text{pgdc}(k - 1, 2) = 1$. De plus, puisque $k > 3$, nous avons $k - 1 > 2$ et nous avons donc trouvé une décomposition. Si k est impair, alors $k - 2$ est également impair et par supposition nous avons aussi $k - 2 > 1$. Ainsi la décomposition $n = (k - 2) + (k + 2)$ vérifie la condition : $\text{pgdc}(k - 2, k + 2) = \text{pgdc}(k - 2, 4) = 1$.

2.4 Nous appelons deux nombres naturels a et b *amis*, si $a \cdot b$ est un carré. Montrer que si a et b sont amis, alors a et $\text{pgdc}(a, b)$ le sont aussi.
Indice : Soit $d = \text{pgdc}(a, b)$ et écrivons $a = dm$, $b = dn$ avec $\text{pgdc}(m, n) = 1$. Quand est-ce que le produit de deux nombres premiers entre eux est un carré parfait ?

Solution : Soit $d = \text{pgdc}(a, b)$ et écrivons $a = dm$, $b = dn$ avec $\text{pgdc}(m, n) = 1$. Supposons que $a \cdot b = d^2 \cdot m \cdot n$ est un carré parfait. Comme m et n sont premiers entre eux, cela signifie que m et n sont eux-même des carrés parfaits. Alors $a \cdot \text{pgdc}(a, b) = d^2 \cdot m$ est également un carré parfait et ainsi a et $\text{pgdc}(a, b)$ sont amis.

Olympiade

2.5 Soient m et n deux nombres naturels dont la somme est un nombre premier. Montrer que m et n sont premiers entre eux.
Indice : Fais une preuve indirecte : suppose que m et n ne sont pas premiers entre eux et essaye de prouver que leur somme n'est alors pas un nombre premier.

Solution : Supposons que m et n ne sont pas premiers entre eux et soit $d = \text{pgdc}(m, n) \geq 2$. Nous avons $d \,|\, m$ et $d \,|\, n$, donc également $d \,|\, m + n$. De plus, $d \leq m$ et $d \leq n$, d'où l'on déduit $d < m + n$. Ainsi d est un diviseur non-trivial de $m + n$, ce qui signifie que $m + n$ n'est pas premier.

2.6 (Canada 97) Déterminer le nombre de paires (x, y) de nombres naturels telles que $x \leq y$ et qui satisfont les équations suivantes :

$$\text{pgdc}(x, y) = 5! \text{ et } \text{ppmc}(x, y) = 50!$$

Indice : Considère les facteurs premiers de 50!.

Solution : Soit $d = \text{pgdc}(x, y)$ et écrivons $x = dm$, $y = dn$ mit $\text{pgdc}(m, n) = 1$. Alors on a $d = 5!$ et $\text{ppmc}(x, y) = dmn = 50!$, donc $mn = \frac{50!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 50$. Dans le nombre $\frac{50!}{5!}$, les 15 nombres premiers appartenant à $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ apparaissent chacun au moins une fois. Soit maintenant p un de ces nombres premiers. Si m est divisible par p, alors par supposition n ne peut pas être divisible par p. Il s'ensuit que l'on peut partitionner l'ensemble P en deux parties, qui correspondent respectivement au nombre m et n. Cela peut être fait de 2^{15} manières différentes. Jusqu'à maintenant nous n'avons pas encore fait attention au fait que $x \leq x$ et donc $m \leq n$. Clairement $m = n$ est impossible puisque les deux nombres ont des facteurs premiers différents. Nous avons ainsi compté le double du nombre de paires, car pour $x > y$ nous avons compté aussi bien (x, y) que (y, x). Au total il y a donc 2^{14} paires différentes qui vérifient la condition.

3 Estimations

Mise en jambes

3.1 On dit qu'un rectangle est *beau*, si la longueur de chacun des côtés est un nombre entier naturel et que les mesures du périmètre et de l'aire du rectangle sont égales. Déterminer tous les *beaux* rectangles.
Indice : Soient a, b les côtés d'un rectangle. Quand les côtés a et b augmentent, qu'est-ce qui augmente le plus vite : l'aire du rectangle ou son périmètre ?

Solution : Soient a, b les côtés du rectangle. Dans un beau rectangle, ils vérifient l'équation $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow ab - 2(a + b) = 0$. Par symétrie, nous pouvons supposer SPDG (sans perte de généralité) que $a \geq b$. Supposons que l'on ait aussi $b \geq 5$. Nous avons alors

$$ab - 2(a + b) = b(a - 2) - 2a \geq 5(a - 2) - 2a = 3a - 10 \geq 15 - 10 > 0$$

et ainsi il n'existe aucun beau rectangle avec ces côtés. Nous voyons donc que le plus petit côté d'un beau rectangle a pour longueur au plus 4. En essayant les différents cas pour $b \in \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient les deux solutions $(a, b) = (6, 3)$ et $(a, b) = (4, 4)$. Par symétrie, $(a, b) = (3, 6)$ est aussi une solution.

3.2 Trouver toutes les paires (x, y) de nombres naturels telles que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

Indice : Que se passe-t-il si x et y deviennent tous les deux grands ? Grâce à cette observation, trouve une borne supérieure pour x et y.

Solution : Supposons que $y \geq 3$ et $x \geq 4$. Alors le côté gauche est strictement plus petit que 1, ce qui est impossible. Ainsi, soit $y \leq 2$, soit $x \leq 3$. En testant ces cinq cas, on obtient les deux solutions $(x, y) = (2, 4)$ et $(x, y) = (3, 3)$.

Avancé

3.3 On dit qu'un parallélépipède rectangle est *beau*, si la longueur de chacun des côtés est un nombre entier naturel et que les mesures du volume et de l'aire des faces sont égales. Déterminer tous les *beaux* parallélépipèdes rectangles.
Indice : Inspire-toi de l'exercice 3.1.

Solution : Soient a, b, c les côtés d'un beau parallélépipède. Cela signifie qu'ils vérifient

$$abc = 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow abc - 2(ab + bc + ca) = 0.$$

Par symétrie, nous pouvons supposer SPDG que $a \leq b \leq c$. Supposons de plus que $a \geq 7$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} abc - 2(ab + bc + ca) &= a(bc - 2b - 2c) - 2bc \geq 7(bc - 2b - 2c) - 2bc) \\ &= 5bc - 14b - 14c = b(5c - 14) - 14c \\ &\geq 35c - 98 - 14c = 21c - 98 \\ &\geq 147 - 98 > 0. \end{aligned}$$

C'est une contradiction, et donc nous avons $a \leq 6$. Nous testons maintenant les différents cas $a \in \{1,2,3,4,5,6\}$ séparément :

$a = 1 \Rightarrow bc - 2b - 2c - 2bc = 0 \Rightarrow -(bc + 2b + 2c) = 0$. C'est une contradiction, car le côté gauche est toujours négatif.

$a = 2 \Rightarrow 2bc - 2b - 2c - 2bc = 0 \Rightarrow -2(b + c) = 0$. Ici aussi le côté gauche est toujours négatif, donc nous obtenons aucune solution.

$a = 3 \Rightarrow 3bc - 6b - 6c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 6b - 6c = 0$. Supposons que $c \geq b \geq 13$. Alors nous avons $bc - 6b - 6c = b(c - 6) - 6c \geq 7c - 78 > 0$, ce qui est une contradiction. Il reste donc à tester les cas $b \in \{3, 4, \ldots, 12\}$ et nous obtenons les solutions suivantes pour (a, b, c) :

$$(3,7,42)\ ,\ (3,8,24)\ ,\ (3,9,18)\ ,\ (3,10,15)\ ,\ (3,12,12).$$

$a = 4 \Rightarrow 4bc - 8b - 8c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 4b - 4c = 0$. Supposons que $c \geq b \geq 9$. Nous avons alors $bc - 4b - 4c = b(c - 4) - 4c \geq 5c - 36 > 0$, ce qui est une contradiction. Il reste donc à tester les cas $b \in \{4, 5, \ldots, 8\}$ et nous obtenons les solutions suivantes pour (a, b, c) :

$$(4,5,20)\ ,\ (4,6,12)\ ,\ (4,8,8).$$

$a = 5 \Rightarrow 5bc - 10b - 10c - 2bc = 0 \Rightarrow 3bc - 10b - 10c = 0$. Supposons que $c \geq b \geq 7$. Nous avons alors $3bc - 10b - 10c \geq 21c - 70 - 10c = 11c - 70 > 0$, ce qui est une contradiction. Il reste donc à tester les cas $b = 5$ et $b = 6$ et nous obtenons la solution suivante pour (a, b, c) :

$$(5,5,10).$$

$a = 6 \Rightarrow 6bc - 12b - 12c - 2bc = 0 \Rightarrow bc - 3b - 3c = 0$. Supposons que $c \geq b \geq 7$. Nous avons alors $bc - 3b - 3c = b(c - 3) - 3c \geq 4c - 21 > 0$, ce qui est une contradiction. Il reste donc à tester le cas $b = 6$ est nous obtenons la solution suivante pour (a, b, c) :

$$(6,6,6).$$

En mettant tous les cas ensemble, nous obtenons les solutions suivantes pour le triplet (a, b, c) :

$$(3,7,42)\ ,\ (3,8,24)\ ,\ (3,9,18)\ ,\ (3,10,15)\ ,\ (3,12,12),$$

$$(4,5,20)\ ,\ (4,6,12)\ ,\ (4,8,8)\ ,\ (5,5,10)\ ,\ (6,6,6),$$

ainsi que toutes les permutations de ces triplets.

3.4 Trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres naturels tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

Indice : Revois l'exercice 3.2.

Solution : L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z}.$$

Le côté droit est toujours strictement plus grand que 1, donc ça doit aussi être le cas du côté gauche. Cependant, si $x \geq 2$ et $y \geq 4$, le côté gauche vaut au plus 1, ce qui est une contradiction. Ainsi, soit $x = 1$, soit $y \leq 3$ et nous testons ces différents cas :

- $x = 1$: Nous obtenons l'équation $\frac{2}{y} = \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3y = 2$. Dans ce cas, les solutions sont donc $(x, y, z) = (1, 2k, 3k)$ pour un nombre naturel k.
- $y = 1$: L'équation devient $\frac{1}{x} + 1 = \frac{3}{z}$. Le côté gauche est toujours strictement plus grand que 1, donc il faut que ce soit aussi le cas pour le côté droit et donc $z < 3$. Nous obtenons donc la solution $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.
- $y = 2$: L'équation devient $\frac{1}{x} = \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3x = z$. Dans ce cas, les solutions sont donc $(x, y, z) = (k, 2, 3k)$ pour un nombre naturel k.
- $y = 3$: L'équation devient $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{3}{z}$. Le côté droit est donc toujours strictement plus grand que $\frac{1}{3}$. Puisque cela doit aussi être le cas pour le côté gauche, on doit avoir $x \leq 2$. Cela donne donc la solution $(x, y, z) = (2, 3, 18)$.

En tout, nous avons donc les deux familles de solutions

$$(x, y, z) = (1, 2k, 3k) \ \text{ et } \ (x, y, z) = (k, 2, 3k) \ \text{ pour } \ k \geq 1,$$

ainsi que les deux solutions particulières

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) \ \text{ et } \ (x, y, z) = (2, 3, 18).$$

3.5 Trouver tous les nombres naturels n tels que $n^2 + 1$ est un diviseur de $n^7 + 13$.
Indice : Considère $n^2 + 1 \mid n^7 + 13$ et commence par essayer de réduire le degré de n au côté droit.

Solution : Avec la division des polynômes, on voit que $n^7+13 = (n^2+1)(n^5-n^3+n)-n+13$. n^2+1 est évidemment un diviseur de $(n^2+1)(n^5-n^3+n)$. Pour que n^2+1 soit un diviseur de n^7+13, il faut donc que $(n^2+1) \mid -n+13$. Pour cela, il faut alors soit que $(n^2+1) \leq -n+13 \Leftrightarrow n \leq 3$, soit que $-n+13 = 0 \Leftrightarrow n = 13$. Nous testons donc les possibilités $n \in \{1, 2, 3, 13\}$ et voyons que $n^2 + 1$ est un diviseur de $n^7 + 13$ si et seulement si $n \in \{1, 3, 13\}$.

Olympiade

3.6 Montrer que l'équation

$$y^2 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

n'admet pas de solution dans les nombres entiers naturels.
Indice : Essaye de coincer le côté droit entre deux carrés consécutifs.

Solution : Le côté droit est $x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$. De plus, nous avons

$$(x^2 + 3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2,$$
$$(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1.$$

Ainsi nous avons

$$(x^2 + 3x)^2 < x(x + 1)(x + 2)(x + 3) < (x^2 + 3x + 1)^2$$

pour tous les nombres naturels x et ainsi $x(x+1)(x+2)(x+3)$ ne peut pas être un carré parfait.

3.7 Trouver tous les nombres entiers x pour lesquels

$$x! = x^2 + 11x - 36$$

Indice : Si x devient grand, le côté gauche grandit beaucoup plus vite que le côté droit. À partir de quelle valeur de x est-ce que le côté gauche est toujours strictement plus grand que le côté droit ?

Solution : Nous voulons trouver tous les nombres naturels x tels que $x! - x^2 - 11x + 36 = 0$. Supposons que $x \geq 5$. Nous avons alors

$$x! - x^2 - 11x + 36 > x(x-1)(x-2) - x^2 - 11x + 36 = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 > 0,$$

ce qui est une contradiction. Nous testons donc les cas restants $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ et trouvons les deux solutions $x = 3$ et $x = 4$.

3.8 (IMO 98) Trouver toutes les paires de nombres naturels (a, b) telles que $a^2b + a + b$ est divisible par $ab^2 + b + 7$.
Solution : Nous avons

$$ab^2 + b + 7 \,|\, b \cdot (a^2b + a + b) - a \cdot (ab^2 - b - 7) = b^2 - 7a.$$

De plus, nous avons $ab^2 + b + 7 \geq b^2 - 7a$ pour tous les nombres naturels a et b. Ainsi, la condition peut uniquement être vérifiée si $b^2 - 7a \leq 0$. Si $b^2 - 7a = 0$, nous obtenons la famille de solution $(a, b) = (7k^2, 7k)$ avec k un nombre naturel. Si $b^2 - 7a < 0$, alors il faut que $7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7$ afin que la condition de divisibilité ci-dessus soit satisfaite. Cette inéquation est équivalente à

$$(a + 1)b^2 + b + 7 - 7a \leq 0.$$

Pour $b \geq 3$, nous obtenons $(a+1)b^2 + b + 7 - 7a \geq 2a + 17 > 0$ et l'inéquation ci-dessus ne peut pas être vérifiée. Ainsi nous devons seulement tester les deux cas $b = 2$ et $b = 1$.
Pour $b = 2$, nous obtenons de la condition de divisibilité originelle $4a + 9 \,|\, 2a^2 + a + 2$. Cependant cela nous donne

$$4a + 9 \,|\, 2 \cdot (2a^2 + a + 2) - (a - 1) \cdot (4a + 9) = 3a - 5.$$

Cependant cette condition n'est jamais vérifiée, car pour tous les nombres naturels a le côté gauche est strictement plus grand que le côté droit et le côté droit n'est jamais nul. Ainsi, pour $b = 2$ il n'y a aucune solution.
Pour $b = 1$, nous obtenons $a + 8 \,|\, a^2 + a + 1$ et ainsi

$$a + 8 \,|\, (a^2 + a + 1) - (a - 7) \cdot (a + 8) = 57.$$

Puisque $57 = 3 \cdot 19$, nous avons $a = 11$ ou $a = 49$.
Au final, nous obtenons donc la famille de solutions

$$(a, b) = (7k^2, 7k) \text{ pour } k \in \mathbb{N},$$

Ainsi que les deux solutions particulières

$$(a, b) = (11, 1) \text{ und } (a, b) = (49, 1).$$