Exercices Théorie des nombres I

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

1 Divisibilité

Mise en jambes

1.1 Montrer que 900 divise $10\,!$.

1.2 Le produit de deux nombres, dont aucun n'est divisible par 10, vaut 1000. Déterminer la somme de ces nombres.

1.3 Trouver tous les nombres naturels n, tels que n est un diviseur de $n^2 + 3n + 27$.

Avancé

1.4 Montrer que :
   (a) $5 \cdot 17 \mid 5^2 \cdot 17 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 8$
   (b) $n(n+m) \mid 3mn^2 + amn^2 + 3n^3 + an^3$

1.5 Déterminer trois nombres naturels à trois chiffres dont la représentation décimale emploie neuf chiffres différents tels que leur produit se termine par quatre zéros.

1.6 (a) Déterminer tous les nombres naturels qui ont exactement 41 diviseurs et qui sont divisibles par 41.
   (b) Déterminer tous les nombres naturels qui ont exactement 42 diviseurs et qui sont divisibles par 42.

Olympiade

1.7 Trouver tous les nombres naturels n tels que $n + 1 \mid n^2 + 1$.

1.8 Montrer que quelque soit n un nombre naturel, il existe n nombres naturels consécutifs tels qu'aucun d'eux n'est premier.

1.9 Montrer qu'il existe une infinité de nombres naturels n, tels que $2n$ est un carré, que $3n$ est un cube et que $5n$ est une cinquième puissance.

2 pgcd et ppcm

Mise en jambes

2.1 (IMO 59) Montrer que la fraction suivante est irréductible quelque soit n :

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

2.2 Trouver toutes les paires (a, b) de nombres naturels tels que

$$\operatorname{ppmc}(a, b) = 10 \operatorname{pgdc}(a, b)$$

Avancé

2.3 Montrer que chaque nombre naturel $n > 6$ est la somme de deux nombres naturels > 1 premiers entre eux.

2.4 Nous appelons deux nombres naturels a et b *amis*, si $a \cdot b$ est un carré. Montrer que si a et b sont amis, alors a et $\operatorname{pgdc}(a, b)$ le sont aussi.

Olympiade

2.5 Soient m et n deux nombres naturels dont la somme est un nombre premier. Montrer que m et n sont premiers entre eux.

2.6 (Canada 97) Déterminer le nombre de paires (x, y) de nombres naturels telles que $x \leq y$ et qui satisfont les équations suivantes :

$$\operatorname{pgdc}(x, y) = 5! \text{ et } \operatorname{ppmc}(x, y) = 50!$$

3 Estimations

Mise en jambes

3.1 On dit qu'un rectangle est *beau*, si la longueur de chacun des côtés est un nombre entier naturel et que les mesures du périmètre et de l'aire du rectangle sont égales. Déterminer tous les *beaux* rectangles.

3.2 Trouver toutes les paires (x, y) de nombres naturels telles que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

Avancé

3.3 On dit qu'un parallélépipède rectangle est *beau*, si la longueur de chacun des côtés est un nombre entier naturel et que les mesures du volume et de l'aire des faces sont égales. Déterminer tous les *beaux* parallélépipèdes rectangles.

3.4 Trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres naturels tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

3.5 Trouver tous les nombres naturels n tels que $n^2 + 1$ est un diviseur de $n^7 + 13$.

Olympiade

3.6 Montrer que l'équation

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

n'admet pas de solution dans les nombres entiers naturels.

3.7 Trouver tous les nombres entiers x pour lesquels

$$x! = x^2 + 11x - 36$$

3.8 (IMO 98) Trouver toutes les paires de nombres naturels (a, b) telles que $a^2b + a + b$ est divisible par $ab^2 + b + 7$.

4 Exercices d'Olympiades précédentes

Les anciens examens sont fortement conseillés pour la préparation ; d'un coté ils vous donnent l'exemple idéal du niveau attendu et d'un autre côté toutes les solutions rédigées sont disponibles sur `www.imosuisse.ch`. Cependant il est préférable de travailler l'exercice par soi-même et de ne pas consulter la solution trop vite !

1. **(Tour préliminaire 2012, 1)** Déterminer toutes les paires (m, n) d'entiers naturels, telles que $(m+1)(n+2)$ est divisible par mn.

2. **(Tour préliminaire 2004, 1)** Trouver tous les entiers naturels a, b et n, tels que

$$a! + b! = 2^n$$

3. **(Tour préliminaire 2005, 3)** Soient m, n deux nombres entiers premiers entre eux. Montrer que les deux nombres entiers $m^3 + mn + n^3$ et $mn(m+n)$ sont aussi premiers entre eux.

4. **(Tour préliminaire 2011, 2)** Trouver tous les nombres naturels n, tels que n^3 est le produit de tous les diviseurs positifs de n.

5. **(Tour préliminaire 2006, 1)** Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers, tels que les différences

$$| p - q |, | q - r |, | r - p |$$

sont aussi des nombres premiers.

6. **(Tour préliminaire 2008, 4)** Trouver tous les nombres naturels n, tels que le nombre de diviseurs positifs de n est égal au troisième plus petit diviseur de n.

7. **(Tour préliminaire 2013, 4)** Trouver toutes les paires (m, n) de nombres naturels telles que

$$(m+1)! + (n+1)! = m^2 n^2$$