Tipps Geometrie III

Aktualisiert: 30. März 2017
vers. 1.0.0

1 Pappus

1. Dies ist gerade Pascal am Sehnensechseck $AQQHPP$, wobei H der Höhenschnittpunkt ist (der Satz scheint auch für stumpfwinklige Dreiecke zu stimmen, dieser Beweis funktioniert dann aber nicht mehr, weil sich die Reihenfolge der Punkte ändert, wenn H ausserhalb von $\triangle ABC$ liegt).
2. Anwendung von Brianchon im Sechseck $AMBCPD$ zeigt, dass sich AC, MP, BD in einem Punkt scheiden. Analog schneiden sich auch AC, NQ, BD in einem Punkt.
3. Tipp fehlt. Benutze Pascal zweimal. Führe dazu neue Punkte ein (wir benutzen dabei WUM).

2 Rechnen

Trigonometrie

1. Schreibe $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Nach einigen algebraischen Umformungen stehen noch die Additionstheoreme da.
2. (Deutschland 2005/2) Drücke das gegebene Produkt als Funktion der Winkel und Seitenlängen des Dreiecks ABC aus. Mit dem Sinussatz findet man dann
$$|BF| \cdot |CG| = \frac{1}{4}\left(\frac{|BC|}{\sin\alpha}\right)^2.$$
3. (IMO 85/1) Benennen wir die Winkel bei A und B mit α bzw. β und zeichnen die Tangentenberührungspunkte ein. Der Radius von k sei r und nach einiger Winkeljagd finden wir $AD = \frac{r}{\tan(\alpha)} + r\tan(\beta/2)$. Auf die gleiche Weise können wir BC und AB berechnen und was dann noch zu beweisen bleibt ist
$$\frac{1}{\tan(\alpha)} + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sin(\alpha)}.$$
Dies kann man mit den trigonometrischen Identitäten zeigen.

TrigCeva

1. Nehme zuerst an die Geraden schneiden sich in T. Mit dem Sinussatz in den Dreiecken BCT, CAT und ABT kann man Dank grosszügigem Kürzen die Gleichung zeigen. Die Umkehrung geht mit Standard-Working-Backward.

2. Benutze das Lemma:
$$\frac{FM}{ME} = \frac{\sin(\angle FAM)}{\sin(\angle MAE)}$$
und alle zyklischen Permutationen davon. Beweisen kann man das mit Sinussatz (Siehe Beispiel 3 auf Seite 5 unten).

Vektoren

1. Zeige $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1D_1}$ (und zyklische Permuationen), indem du die Definitionen einsetzt von $A_1, \ldots$

2. Sei $ABCD$ ein Viereck. Die Summe der Quadrate zweier gegenüberliegender Seiten ist gleich gross, heisst
$$\begin{aligned} (B-A)^2 + (D-C)^2 &= (C-B)^2 + (A-D)^2 \\ \Leftrightarrow \quad A \cdot B + C \cdot D &= B \cdot C + D \cdot A \\ \Leftrightarrow \quad (A-C)(B-D) &= 0, \end{aligned}$$
was heisst, dass AC und BD rechtwinklig sind (die Wahl des Ursprungs spielt hier keine Rolle).

3. Wähle den Mittelpunkt des Umkreises als Ursprung. Alle Geraden gehen durch $\frac{A+B+C+D}{2}$.

4. Sei der Mittelpunkt des Kreises der Ursprung. Es gilt nun $Q = P + (A-P) + (B-P)$ und wir berechnen
$$Q^2 = \ldots = 2A^2 - P^2.$$
Weil dies konstant ist, liegt Q auf dem so definierten konzentrischen Kreis. Vergiss nicht zu zeigen, dass man für jeden Punkt auf diesem konzentrischen Kreis A und B findet, sodass $PAQB$ ein Rechteck ist.

5. Es sind mehrere Lösungen möglich, eine andere ist im Buch von Engel gegeben (Seite 306, Aufgabe 27).
Wir nehmen als Ursprung den Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$. Die Bedingungen an X kann man umformen zu
$$(C-A) \cdot (X+B) = 0 \qquad \text{(und zyklische Permuationen)},$$
was bedeutet, dass die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $X+B$ rechtwinklig sind. Wegen der speziellen Wahl des Ursprungs ist dies genau dann der Fall, wenn $X+B$ ein Vielfaches von $A+C$ ist. Wir machen dies mit allen zyklischen Permutationen und erhalten
$$\begin{aligned} X &= p \cdot (A+C) - B \\ X &= q \cdot (B+A) - C \\ X &= r \cdot (C+B) - A \end{aligned}$$
für reelle Zahlen p, q, r. Man sieht leicht, dass die einzige Lösung dieses Gleichunssystems $p = q = r = -1$ ist. Somit erhalten wir $X = -(A+B+C)$. X ist also die Spiegelung vom Höhenschnittpunkt am Umkreismittelpunkt.

Zu Beispiel 7 (Seite 9)

1. Nicht sehr interessant Beispiel 7 auf $ABCD$ anzuwenden, aber wenn wir das nicht-konvexe Viereck $ABDC$ nehmen, bekommen wir
$$a^2 + a^2 - e^2 - f^2 = -2b^2.$$
2. Nimm $BCAD$.
3. In einer solchen Situation ist es oft sehr nützlich einen Punkt P einzuführen, so dass $ABPC$ ein Parallelogramm ist. Nun ist D auch der Mittelpunkt von AP. Vergleiche kurz mit Aufgabe 1 in diesem Abschnitt.
4. Wir haben
$$\begin{aligned} AS^2 &= \left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ BS^2 &= \left(\frac{2}{3}s_b\right)^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2). \end{aligned}$$
Wende nun Pythagoras im Dreieck ABS an.

Komplexe Zahlen

1. Die Schwerpunkte der drei Dreiecke sind
$$x = \frac{1}{3}(b(1+\epsilon) + c(1+\epsilon^5)) \qquad \text{(und zyklische Permutationen)}$$
Zeige nun
$$z = x + (y - x)\epsilon = x\epsilon^5 + y\epsilon.$$
2. B ist wahrscheinlich der beste Kandidat für den Ursprung. Dann ist $M = ta$ für eine reelle Zahl t. Die anderen Punkte können ausgedrückt werden durch a und t
$$m = ta \qquad p = ta\epsilon^5 \qquad d = \frac{t}{3}a(1+\epsilon^5) \qquad e = \frac{1}{2}a(1+t\epsilon^5).$$
Berechnen wir nun $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{DC}$ und sehen, dass
$$2\epsilon^5\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC},$$
also hat $\triangle CDE$ die Winkel $30°, 60°, 90°$.
3. Wir nehmen O als Ursprung. Wir sind fertig, wenn wir zeigen
$$\overrightarrow{H_1H_2} = t \cdot \overrightarrow{S_1S_2}i = t \cdot (c + d - a - b)i$$
für irgendeine reelle Zahl t (weil i einen Vektor um $90°$ dreht). Weil h_1 nur von b und c abhängt, müssen wir zeigen
$$h_1 = t(b - c)i \quad \text{and} \quad h_2 = t(d - b)i.$$
Der entscheidende Teil ist zu zeigen, dass der reelle Faktor für beide Gleichungen gleich ist. Wir nennen $\angle BOC = \angle DOA = \alpha$ und zeigen mit Trigonometrie $t = \frac{1}{\tan(\alpha)}$, was den Beweis abschliesst.

4. (Shortlist 77) Gibt viel zu tun. Wir nehmen die komplexen Zahlen $x = A$ und $y = A'$, dann $B = x\epsilon$ and $B' = y\epsilon$. Zeige $\overrightarrow{SB'} = 2\overrightarrow{SM}\epsilon$ und $2\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SA'}\epsilon$.

5. (IMO 93/2) Als Ursprung nehmen wir D. Wie immer sei $\triangle ABC$ im Gegenuhrzeigersinn benannt. Wir führen den Punkt $p = b(-i)$ ein. Aus den Voraussetzungen kann man zeigen $\triangle DAP \sim \triangle CAB$. Definiere

$$s = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{PD} \qquad \angle CAD = \alpha.$$

Sei r das gesuchte Verhältnis. Beachte, dass r nicht gleich $\frac{(b-a)c}{(c-a)d}$ ist, weil wir den Betrag von jeder komplexen Zahl nehmen müssen! Also

$$r = \frac{|b-a| \cdot |c|}{|c-a| \cdot |b|}.$$

Es ist nicht so klar, wie wir diese Beträge berechnen können. Es gibt zwei Wege c auszudrücken. Der eine geht über a, der andere über b:

$$\begin{array}{rcl} c &=& a + \overrightarrow{AC} = a + \overrightarrow{AD}e^{i\alpha} = a - s \cdot ae^{i\alpha} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{c}{a} = 1 - se^{i\alpha} \\ c &=& b + \overrightarrow{BC} = b + \overrightarrow{PD}e^{i\alpha} = b + s \cdot bie^{i\alpha} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{c}{b} = 1 + sie^{i\alpha}. \end{array}$$

Von der ersten Gleichungen bekommen wir ebenfalls $|a-c| = s|a|$. Um $|b-a|$ zu erhalten, nehmen wir die Differenz der beiden Gleichungen

$$\frac{c}{b} - \frac{c}{a} = s(1+i)e^{i\alpha},$$

woraus folgt $|a-b| = s\frac{|a|\cdot|b|}{|c|}\sqrt{2}$. Alles in allem resultiert $r = \sqrt{2}$.
Ich glaube nicht, dass für den zweiten Teil der Aufgabe komplexe Zahlen hilfreich sind, besser gehts mit gewöhnlichen Methoden.

Kartesische Koordinaten

1. (Iran 2005) Wir geben die Koordinaten aller Punkte in unserem System (Ursprung B, x-Achse auf BC). Alle Koordinaten können über ähnliche Dreiecke gefunden werden.

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} a \\ \frac{-a^2}{b} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ \frac{b \cdot p}{2a} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} a + \frac{p}{2} \\ b - \frac{b \cdot p}{2a} \end{pmatrix}$$

Überzeuge dich von

$$\frac{P_y - T_y}{P_x - T_x} \cdot \frac{Y_y - X_y}{Y_x - X_x} = -1,$$

wobei P_y die y-Koordinate von P bezeichnet, ...

2. (IMO 88/1) Sei Q der zweite Schnittpunkt von BP mit dem kleineren Kreis und sei M der Mittelpunkt von BC. Eine wichtige Beobachtung ist, dass AQ ein Durchmesser des kleineren Kreises ist (wegen des rechten Winkels bei P). Wir führen nun eine Art Koordinatensystem in M ein, d.h. eigentlich führen wir einfach zwei Variablen ein: $OM = s$ und $BM = t$. Nun berechnen wir mit Hilfe von Pythagoras

$$\begin{array}{rcl} BC^2 + CA^2 + AB^2 &=& BC^2 + BP^2 + PB^2 + 2AP^2 \\ &=& 4t^2 + \left(t - \sqrt{r^2 - s^2}\right)^2 + \left(t + \sqrt{r^2 - s^2}\right)^2 + 2(2s)^2 \\ &=& 6t^2 + 6s^2 + 2r^2 = 6R^2 + 2r^2, \end{array}$$

was unabhängig von B ist.
Aus der Betrachtung von einigen speziellen Anordungen, beziehen wir die Vermutung, dass der gesuchte geometrische Ort der Kreis mit Durchmesser OP sein könnte. Tatsächlich, stauchen wir den kleineren Kreis mit Faktor 2 an P, geht Q immer in M über. Weil der geometrische Ort von Q offensichtlich der kleinere Kreis ist, ist der geometrische Ort von M der Kreis mit Durchmesser OP.

3 Geometrische Ungleichungen

1. (CH 2000/4) Sei X der zweite Schnittpunkt von k_1 mit der Tangente zu k_2 durch P und sei Y der analoge Punkt auf k_2. Wenden wir den Sinussatz in den beiden ähnlichen Dreiecken APX und BYP an, reduziert sich das Problem zum Finden des Maximums von $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ mit $\alpha+\beta$ konstant. Mit Hilfe der Produkt-in-Summe-Formel zeigen wir, dass dies für $\alpha = \beta$ der Fall ist. Somit liegt die gesuchte Strecke auf der äusseren Winkelhalbierenden von $\angle XPY$.

2. (CH 98/8) Von Ceva folgt

$$XB \cdot YC \cdot ZA = XC \cdot YA \cdot ZB.$$

Also können wir die Ungleichung symmetrisch machen, indem wir sie quadrieren:

$$(XY \cdot YZ \cdot ZX)^2 \geq (XB \cdot YC \cdot ZA)^2 = XB \cdot YC \cdot ZA \cdot XC \cdot YA \cdot ZB.$$

Es genügt zu zeigen

$$XY^2 \geq CX \cdot CY.$$

Mit dem Kosinussatz und QM-GM erhalten wir

$$XY^2 = CX^2 + CY^2 - CX \cdot CY \geq 2CX \cdot CY - CX \cdot CY = CX \cdot CY.$$

3. (Balkan 96/1) Benutzen wir Vektoren! Wir finden für d

$$9d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \leq 9R^2 - 3(abc)^{\frac{2}{3}},$$

wobei wir AM-GM benutzten. Es bleibt

$$(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 6rR.$$

Mit Hilfe einiger Identitäten im Dreieck können wir zeigen

$$2rR = \frac{abc}{a+b+c}.$$

4. (IMO 83/6) Substituieren wir $a = x + y, b = y + z, c = z + x$. Die Ungleichung wird

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z),$$

was wir mit CS zeigen können.

5. (IMO 96/5) Wir benennen $\angle FAB = \alpha, \angle BCD = \beta, \angle DEF = \gamma$. Die Ungleichung kann verwandelt werden zu

$$\frac{FB}{\sin(\alpha)} + \frac{BD}{\sin(\beta)} + \frac{DF}{\sin(\gamma)} \geq P$$

Um dies zu erhalten, müssen wir irgendein globales Argument verwenden (so dass das ganze Sechseck vorkommt). Eine komplette Lösung findest du auf der Homepage von Kalva (http://www.kalva.demon.co.u

Weitere Aufgaben

1. Mit Hilfe von Vektoren geht es recht einfach. Nachden wir ein bisschen umgeformt haben, bleibt zu zeigen (wenn der Umkreismittelpunkt als Ursprung gewählt wird)

$$A \cdot B = A \cdot C \quad \Leftrightarrow \quad |AB| = |AC|,$$

was recht klar ist.

2. (Shortlist 03) Benutze TrigCeva und Beispiel 3 auf Seite 5 (dasselbe Lemma wie bei Aufgabe 2 im Abschnitt TrigCeva), um zu zeigen

$$\frac{AB}{BC} = \left(\frac{AQ}{QC}\right)^2.$$

3. (IMO 62/6) Vektoren. Mit der üblichen Notation erhalten wir

$$OI^2 = \left(\frac{aA + bB + cC}{2s}\right)^2 = \ldots = R^2 - \frac{abc}{2s},$$

wobei wir die folgende Formel verwendet haben

$$A \cdot B = \frac{A^2 + B^2 - AB^2}{2} = R^2 - \frac{c^2}{2}.$$

Es bleibt zu zeigen

$$\frac{abc}{2s} = 2Rr,$$

was wir mit einigen Dreiecks-Identitäten zeigen können.