Geometrie III

Daniel Sprecher

Aktualisiert: 13. März 2018
vers. 1.0.0

Inhaltsverzeichnis

1 Pappus

Der Satz von Pappus ist in seiner vollen Allgemeinheit ein tiefes Resultat in der höheren Mathematik. Er handelt von Punkten, die auf allgemeinen Kegelschnitten (Geraden, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln) liegen. Wir wollen hier zwei wichtige Spezialfälle behandeln.

1.1 Pappus auf Geraden

Satz 1.1 (Pappus auf Geraden). *Seien A_1, A_3, A_5 drei Punkte auf einer Geraden und A_2, A_4, A_6 drei Punkte auf einer weiteren Gerade. Die drei Schnittpunkte*

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 \quad A_2A_3 \cap A_5A_6 \quad A_3A_4 \cap A_6A_1$$

liegen dann auf einer Geraden.

Man kann diesen Fall von Pappus beweisen, indem man ähnlich wie beim Beweis von Desargues vorgeht (Geometrie II/S.10): Menelaos im Dreieck, das durch die Geraden A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 gebildet wird, dann Faktoren suchen und die Gleichungen multiplizieren.

1.2 Pascal und Brianchon

Dieser Satz über Sehnensechsecke wurde im 17. Jhd. von Blaise Pascal veröffentlicht.

Satz 1.2 (Pascal). *Sei $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ein Sehnensechseck. Die drei Schnittpunkte*

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 \quad A_2A_3 \cap A_5A_6 \quad A_3A_4 \cap A_6A_1$$

sind kollinear.

Beweis. Wir geben einen kurzen, erstaunlich schönen Beweis, der 1993 von Jan van Yzeren gefunden wurde. Seien

$$D = A_1A_2 \cap A_4A_5 \quad E = A_2A_3 \cap A_5A_6 \quad F = A_3A_4 \cap A_6A_1.$$

Sei k der Umkreis von $\triangle A_3A_6F$. Die Geraden A_2A_3 und A_5A_6 schneiden k nochmals in den Punkten P bzw. Q. Mit bekannter Winkeljagd an Sehnenvierecken zeigt man

$$PQ \parallel A_2A_5 \quad PF \parallel A_1A_2 \quad QF \parallel A_4A_5.$$

Man kann nun erkennen, dass die Seiten der Dreiecke PQF und A_2A_5D parallel sind. Daraus können wir schliessen, dass die Dreiecke durch eine zentrische Streckung ineinander überführbar sind. Dies bedeutet, dass sich die Geraden PA_2, QA_5 und FD in einem Punkt, dem Punkt E, schneiden. D, E, F sind also kollinear. $\square$

Der nächste Satz wurde ein paar Jahre später von C.J. Brianchon entdeckt.

Satz 1.3 (Brianchon)**.** *Sei $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ein Sechseck, das einen Inkreis besitzt, d.h. es existiert ein Kreis, der jede der sechs Seiten berührt. Die Geraden A_1A_4, A_2A_5 und A_3A_6 schneiden sich dann in einem Punkt.*

Dieser Satz ist eng verflochten mit dem Satz von Pascal. Mit Hilfe der projektiven Geometrie kann man zeigen, dass sie völlig äquivalent sind. Weil wir keine projektive Geometrie machen, lassen wir das.

In der Anwendung braucht man die beiden eben erwähnten Sätze oft in einer degenerierten Form, d.h. wenn zwei Punkte oder Geraden zusammenfallen. Wenn wir beim Satz von Pascal zwei Ecken aufeinanderzu bewegen, wird die Gerade durch diese beiden Punkte immer mehr zur Tangente an den Umkreis des Sechsecks.

Beispiel 1. *Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Inkreis berühre BC, CA, AB in den Punkten D, E bzw. F. Zeige, dass die Punkte*

$$AB \cap DE \quad BC \cap EF \quad CA \cap FD$$

auf einer Geraden liegen.

Lösung. Da AB, BC und CA Tangenten an den Inkreis sind, ist dies gerade der Satz von Pascal am (degenerierten) Sechseck $DDEEFF$. $\square$

Auch Brianchon wendet man oft an degenerierten Sechsecken an. Lassen wir einen Innenwinkel des Sechsecks langsam auf $180°$ anwachsen, nähert sich die Ecke immer mehr dem Inkreis des Sechsecks, bis die Ecke schliesslich zum Tangentenberührungspunkt wird.

Beispiel 2. *Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Inkreis berühre BC, CA, AB in den Punkten D, E bzw. F. Zeige, dass sich die Geraden AD, BE und CF in einem Punkt schneiden.*

Lösung. Man könnte dieses Beispiel auch leicht mit Ceva lösen. Es ist aber auch nichts anderes als Brianchon am (degenerierten) Sechseck $AFBDCE$. $\square$

2 Rechnen

Meistens sind die Geometrieaufgaben an Olympiaden nicht dazu geeignet, um sie durch sture Berechnungen zu lösen. Trotzdem ist es manchmal machbar, wenn es richtig angegangen wird. Ein Vorteil dieser Methoden ist, dass mühsame Fallunterscheidungen und komplizierte Skizzen wegfallen, was sonst in der Geometrie schon mal vorkommt. Im Buch von Arthur Engel werden Vektorgeometrie und die komplexen Zahlen sehr ausführlich behandelt und es hat ganz viele Übungsbeispiele. Für dieses Skript nehmen wir an, dass die Grundlagen der Trigonometrie, Vektorgeometrie und komplexen Zahlen bekannt sind und werden lediglich nochmals auf die wichtigsten Dinge hinweisen.

2.1 Trigonometrie

Um Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen herzuleiten und diese für spezielle Winkel zu berechnen, betrachten wir als erstes den Einheitskreis. Sinus wird auf der y-Achse, Cosinus auf der x-Achse und Tangens auf der Tangente bei $(x, y) = (1, 0)$ abgelesen. Damit leiten wir z.B. folgendes her

$$\begin{aligned} \sin(0°) &= 0 & \cos(x) &= \sin(90° - x) \\ \sin(30°) &= \frac{1}{2} & \cos(x) &= -\cos(180° - x) \\ \sin(45°) &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \sin(60°) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(90°) &= \infty \\ \sin(90°) &= 1 & \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(360° - x) &= -\sin(x) & \tan^2(x) + 1 &= \frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

2.1.1 Additionstheoreme

Bei den komplexen Zahlen werden wir sehen, dass die trigonometrischen Funktionen über die komplexen Zahlen definiert sind. Die Herleitung der Additionstheoreme ist dann ganz einfach, man sollte diese Formeln aber sowieso auswendig können

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ \arctan(x) \pm \arctan(y) &= \arctan\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right) \end{aligned}$$

Das Additionstheorem für Arctangens kann man aus dem Additionstheorem von Tangens herleiten, indem man $\alpha = \arctan(x)$ und $\beta = \arctan(y)$ einsetzt und auf beiden Seiten der Gleichung die streng monoton steigende Funktion Arctangens anwendet. Lustige Anwendungen des letzten Theorems findest du in den Skripten über trigonometrische Substitution und über Teleskopreihen.

Aus den Additionstheoremen lassen sich rekursiv die trigonometrischen Funktionen von $(n \cdot \alpha)$ ausrechnen. So ist z.B.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha).$$

Ersetzt man in dieser Formel α durch $\alpha/2$ bekommt man die auch ganz nützlichen Halbwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{2} \\
\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\cos(\alpha)}{2} \\
\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}
\end{aligned}$$

Wir können jetzt das Ganze noch auf die Spitze treiben. Eine häufige Substitution, vor allem in der Analysis, ist $t = \tan(\alpha/2)$. Mit der Halbwinkelformel für Tangens berechnen wir damit

$$\begin{aligned}
t \doteq \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{(1-\cos(\alpha))^2}{1-\cos^2(\alpha)}} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \\
\Rightarrow \quad \cos(\alpha) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\Rightarrow \quad \sin(\alpha) &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\Rightarrow \quad \tan(\alpha) &= \frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$

Diese Formeln werden auch Rationalisierungsformeln genannt, weil man damit die trigonometrischen Funktionen in rationale Funktionen umsubstituieren kann.

2.1.2 Summen und Produkte

Wenn man Ausdrücke, die trigonometrische Funktionen enthalten, abschätzen möchte, sind die Summe-in-Produkt- und Produkt-in-Summe-Formeln sehr wichtig. Man muss sie nicht auswendig lernen, denn die Herleitung aus den Additionstheoremen geht recht zügig. Möchten wir z.B. den Ausdruck $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ in eine Summe verwandeln, denken wir automatisch an das Additionstheorem für Cosinus, denn da kommt dieses Produkt ja auch vor. Den störenden Term $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ werden wir los, indem wir $\cos(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ geeignet kombinieren

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) - (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) \\
&= 2\sin(\alpha)\sin(\beta).
\end{aligned}$$

Analog ergeben sich alle Produkt-in-Summe-Formeln

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).
\end{aligned}$$

Durch Substitution von $\alpha-\beta$ und $\alpha+\beta$ in diesen Formeln leitet man sich die Summe-in-Produkt-Formeln her

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)+\sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin(\alpha)-\sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)+\cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)-\cos(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.1.3 Der Sinus- und Cosinussatz

Im Dreieck ABC seien α, β, γ die Eckwinkel, a, b, c die Seitenlängen ($a \doteq BC, \ldots$) und R sei der Umkreisradius.

Satz 2.1 (Sinussatz)**.**

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

Satz 2.2 (Cosinussatz)**.**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Der Sinussatz ist viel handlicher, dazu ein Beispiel, das man bei IMO-Aufgaben auch schon als Lemma brauchen konnte (und vielleicht wiedereinmal brauchen kann).

Beispiel 3. *Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$. Sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke BC. Zeige*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\sin(\angle BAP)}{\sin(\angle PAC)}.$$

Lösung. Wir wenden den Sinussatz in den Dreiecken ABP und ACP an

$$\frac{BP}{\sin(\angle BAP)} = \frac{AB}{\sin(\angle APB)} \qquad \frac{PC}{\sin(\angle PAC)} = \frac{AC}{\sin(\angle APC)}.$$

Wegen $AB = AC$ und

$$\sin(\angle APB) = \sin(180^\circ - \angle APB) = \sin(\angle APC)$$

sind die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich gross und es gilt somit

$$\frac{BP}{\sin(\angle BAP)} = \frac{PC}{\sin(\angle PAC)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BP}{PC} = \frac{\sin(\angle BAP)}{\sin(\angle PAC)}.$$

□

2.2 Vektoren

Die Vektorgeometrie gilt in Räumen beliebiger Dimension, für uns wird aber nur die Dimension 2 und in seltenen Fällen 3 relevant sein. Im Raum gibt es immer genau einen speziellen Punkt O, den wir als *Ursprung* oder *Nullpunkt* des Raumes bezeichnen. Weil O fest ist, wird jeder Punkt P im Raum durch den Vektor $\overrightarrow{OP}$ eindeutig beschrieben. Wir identifizieren darum P mit $\overrightarrow{OP}$

$$P \doteq \overrightarrow{OP}.$$

Wenn wir wir also von einem Punkt im Raum sprechen, meinen wir in der Vektorgeometrie eigentlich immer den Vektor vom Ursprung zu diesem Punkt. Der Raum besteht darum nicht aus Punkten sondern aus Vektoren und wird darum als *Vektorraum* bezeichnet. Eine Parallelverschiebung eines Vektors, d.h. eine Verschiebung, bei dem sich die Länge und Richtung des Vektors nicht ändert, lässt den Vektor an sich unverändert. Wir können deshalb einen beliebigen Vektor $\overrightarrow{AB}$ zum Ursprung verschieben, so dass der Ursprung des Vektorraumes und der Ursprung des Vektors zusammenfallen und wir schreiben

$$\overrightarrow{AB} = B + (-A) = B - A.$$

Jede Parallelverschiebung von $\overrightarrow{AB}$ stellt somit genau den gleichen Vektor im Vektorraum dar, sie sind nicht unterscheidbar.
Wir setzen voraus, dass dem Leser das Rechnen mit Vektoren bereits bekannt ist. Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl entspricht einer Streckung, bei der Addition zweier Vektoren werden die Vektoren einfach aneinandergereiht.

Beispiel 4. *Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck im 3-dimensionalen Raum (nicht unbedingt konvex) und seien P, Q, R, S die Mittelpunkte der Seiten. Zeige, dass $PQRS$ ein Parallelogramm ist (und somit insbesondere planar ist).*

Lösung. $PQRS$ ist genau dann planar, wenn gilt

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \quad \Leftrightarrow \quad Q - P = R - S \quad \Leftrightarrow \quad P + R = Q + S.$$

Dies können wir leicht zeigen:

$$\begin{aligned} P &= \frac{A+B}{2}, \quad R = \frac{C+D}{2} \quad \Rightarrow \quad P + R = \frac{A+B+C+D}{2} \\ Q &= \frac{B+C}{2}, \quad S = \frac{D+A}{2} \quad \Rightarrow \quad Q + S = \frac{A+B+C+D}{2} \end{aligned}$$

□

Kongruenzabbildungen, die sich mit Vektoren leicht darstellen lassen, sind Translationen und Punktspiegelungen (Drehungen um 180°)

$$\begin{aligned} \text{Translation um } A: &\quad Z \xmapsto{T_A} A + Z \\ \text{Spiegelung an } A: &\quad Z \xmapsto{S_A} Z + 2\overrightarrow{ZA} = 2A - Z. \end{aligned}$$

Schaltet man mehrere Translationen hintereinander, gibt das natürlich wieder eine Translation:

$$T_A \circ T_B(Z) = T_A(T_B(Z)) = T_{A+B}(Z) \quad \text{, denn} \quad Z \xmapsto{T_B} B+Z \xmapsto{T_A} A+(B+Z) = (A+B)+Z.$$

Für die Nacheinanderschaltung von Punktspiegelungen erhält man

$$\begin{aligned} S_A \circ S_B: &\ Z \xmapsto{S_B} 2B - Z \xmapsto{S_A} 2A - (2B - Z) = 2(A - B) + Z \\ S_A \circ S_B \circ S_C: &\ Z \xmapsto{S_C} 2C - Z \xmapsto{S_B} 2(B - C) + Z \xmapsto{S_A} 2A - (2(B - C) + Z) = 2(A - B + C) - Z. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} S_A \circ S_B &= T_{2\overrightarrow{BA}} \\ S_A \circ S_B \circ S_C &= S_D \qquad \text{, wobei } D = A - B + C. \end{aligned}$$

Weil $D + B = A + C$ gilt, ist $ABCD$ ein Parallogramm.

Beispiel 5. *Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$ aus den Seitenmittelpunkten.*

Lösung. Seien P, Q, R, S, T die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DE bzw. EA und sei X derjenige Punkt, dass $QRSX$ ein Parallelogramm ist. Es gilt nun

$$S_S \circ S_R \circ S_Q = S_X \quad \Rightarrow \quad S_T \circ S_S \circ S_R \circ S_Q \circ S_P = S_T \circ S_X \circ S_P.$$

Die Abbildung auf der rechten Seite ist wiederum eine Punktspiegelung, wobei A offensichtlich ein Fixpunkt ist. Somit ist $APXT$ ein Parallelogramm und wir haben A konstruiert. Die weiteren Eckpunkte konstruiert man, indem man A an den Seitenmittelpunkten spiegelt. □

Wie wir bei der Einführung der Sätze von Ceva und Menelaos gesehen haben, lässt sich der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC nur sehr schwer über Winkel beschreiben. Viel einfacher geht es über Vektoren. Sei D der Mittelpunkt von BC, für den Schwerpunkt S gilt nun

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \quad \Leftrightarrow \quad S - A = \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2} - A\right) \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{A+B+C}{3}.$$

Beachte, dass dies unabhängig von der Wahl des Ursprungs gilt. Für beliebige $n \geq 1$ Punkte $P_1, \ldots, P_n$ gibt es genau einen Schwerpunkt S:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{SP_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i.$$

2.2.1 Skalarprodukt

Wir haben bisher die Vektoren nie in ihre Koordinaten zerlegt, es war nie nötig. Weiter unten werden wir noch einige Beispiele für das Rechnen mit Koordinaten geben. Hier definieren wir das Skalarprodukt über die Koordinaten, wir werden sie jedoch für das Rechnen auch weiterhin nicht brauchen. Im n-dimensionalen Raum schreiben wir die Vektoren A und B als

$$A = (a_1, \ldots, a_n) \qquad B = (b_1, \ldots, b_n)$$

und definieren das Skalarprodukt von zwei Vektoren über

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Daran, dass man mit Hilfe des Skalarprodukts mit Vektoren fast so rechnen kann wie mit Zahlen, muss man sich zuerst etwas gewöhnen. Bevor wir zu den Beispielen kommen einige wichtige Eigenschaften des Skalarprodukts:

- Im Allgemeinen ist
$$(A \cdot B)C \neq A(B \cdot C).$$
Der Vektor auf der linken Seite ist parallel zu C, der auf der rechten ist parallel zu A.

- Die Länge eines Vektors A ist
$$|A| = \sqrt{A^2} = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

- Sei φ der Winkel zwischen A und B, d.h. $\varphi = \angle AOB$. Es gilt
$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos(\varphi).$$
Über diese Gleichung ist der Winkel zwischen zwei Vektoren definiert.

- Aus der letzten Gleichung sieht man auch leicht

$$A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot B = 0.$$

Wir schreiben im folgenden kurz $AB = A \cdot B$ und somit $A^2 = |A|^2$. In gewissen Fällen kann die Rechnung durch eine geeignete Wahl des Ursprungs erheblich vereinfacht werden. Hat man es mit einem Dreieck zu tun, ist meistens der Umkreismittelpunkt eine sehr gute Wahl. Wir verschieben also das Dreieck ABC so, dass O der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist. Sei R der Umkreisradius, wir haben dann

$$A^2 = B^2 = C^2 = R^2.$$

Für den Schwerpunkt S gilt natürlich immer noch $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$. Sei H der Höhenschnittpunkt von Dreieck ABC. Es ist allgemein bekannt, dass die Punkte O, S und H auf der sog. Eulergeraden liegen, und dass gilt $\overrightarrow{SH} = 2\overrightarrow{OS}$ (man beweist dies, indem man $\triangle ABC$ an S mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ streckt). Somit ist

$$H = A + B + C.$$

Dies gilt aber nur, wenn der Umkreismittelpunkt und der Ursprung übereinstimmen (sonst ist $H = A + B + C - 2U$, wobei U der Umkreismittelpunkt ist). Als Beispiel berechnen wir den Inkreismittelpunkt.

Beispiel 6. *Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Zeige*

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c},$$

wobei a, b, c die Längen von BC, CA bzw. AB sind. Dies ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

Lösung. Wir machen Working Backward, d.h. wir definieren I über die Gleichung in der Aufgabenstellung und zeigen, dass I zu allen Seiten den gleichen Abstand hat. Dies genügt, da jedes Dreieck genau einen Inkreismittelpunkt hat.
Seien D, E, F die Projektionen von I auf BC, CA bzw. AB. Wir zeigen $|ID| = |IE|$, indem wir diese Gleichung umformen, bis sie offensichtlich wird:

$$
\begin{aligned}
& |ID| = |IE| \\
\Leftrightarrow \quad & ID^2 = CI^2 - CD^2 = IE^2 = CI^2 - CE^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |CD| = \frac{\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB}}{|CB|} = \frac{(I - C)(B - C)}{a} = |CE| = \frac{\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA}}{|CA|} = \frac{(I - C)(A - C)}{b} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{b}{a + b + c}(a(A - C) + b(B - C)) \cdot (B - C) = \frac{a}{a + b + c}(a(A - C) + b(B - C)) \cdot (A - C) \\
\Leftrightarrow \quad & b\left(a\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = a\left(a\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & b^2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2a^2 = a^2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2b^2.
\end{aligned}
$$

Durch zyklisches Vertauschen bekommen wir auch $|IE| = |IF|$, womit wir fertig wären. $\square$

Beispiel 7. *Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Zeige, dass gilt*

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Lösung. Wir rechnen die linke Seite aus

$$\begin{aligned}(B-A)^2 + (D-C)^2 - (C-B)^2 - (A-D)^2 &= 2(BC + DA - AB - CD) \\ &= 2(C-A)(B-D) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.\end{aligned}$$

□

Die Anwendungen der Gleichung aus Beispiel 7 sind recht vielfältig. So liefert es eine Bedingung, wann die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig aufeinander stehen. In den Übungen findest du einige Formeln, die du mit dieser Gleichung beweisen kannst. Wichtig dabei ist, dass der Satz auch für nicht-konvexe und sich selbst schneidende Vierecke gilt. Weil Beispiel 6 ziemlich hässlich und Beispiel 7 recht kurz ist, zum Schluss noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel 8. *Die Rechtecke $ABDE, BCFG, CAHI$ werden ausserhalb auf die Seiten des Dreiecks ABC konstruiert. Zeige, dass sich die Mittelsenkrechten der Strecken HE, DG, FI in einem Punkt schneiden.*

Lösung. Wir beweisen als erstes ein Lemma, das auch bei anderen Aufgaben immer mal wieder nützlich ist.

Lemma 2.3. *Seien A, B, C, D vier Punkte. Gilt für alle Punkte X der Ebene*

$$AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2,$$

so ist $ABCD$ ein Rechteck. Es gilt auch die Umkehrung und diese Gleichung charakterisiert also das Rechteck.

Beweis des Lemmas. Ausmultiplizieren der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}&(X-A)^2 + (X-C)^2 = (X-B)^2 + (X-D)^2 \\ \Leftrightarrow\ & X^2 - 2AX + A^2 + X^2 - 2CX + C^2 = X^2 - 2BX + B^2 + X^2 - 2DX + D^2 \\ \Leftrightarrow\ & A^2 + C^2 - B^2 - D^2 = 2AX + 2CX - 2BX - 2DX = 2X(A + C - B - D)\end{aligned}$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung konstant ist, die rechte Seite aber im Allgemeinen mit X ändert, müssen beide Seiten konstant 0 sein:

$$A^2 + C^2 = B^2 + D^2 \qquad (1)$$

$$A + C = B + D \qquad (2)$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Wir zeigen nun durch algebraische Umformungen der Gleichungen (1) und (2), dass die Diagonalen gleich lang sind. Daraus folgt, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.

$$(2)^2 - (1): \qquad 2AC = 2BD \tag{3}$$

$$(1) - (3): \qquad (A-C)^2 = (B-D)^2 \tag{4}$$

$\square$

Wenden wir uns nun der eigentlichen Aufgabe zu. Sie sieht zuerst sehr schwierig aus, weil erste Versuche mit Winkeljagd, Ceva oder Pythagoras nicht funktionieren. Mit der Beobachtung des Lemmas verwandelt sich die Aufgabe aber in ein Standardargument, das dem Beweis der Existenz des Umkreismittelpunktes stark ähnlich sieht (siehe Geometrie II).

Sei P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von DG und EH. Wir zeigen, dass P auch auf der Mittelsenkrechten von FI liegt. Dazu benutzen wir zuerst das Lemma und erhalten die drei Gleichungen

$$PC^2 + PH^2 = PI^2 + PA^2$$
$$PA^2 + PD^2 = PE^2 + PB^2$$
$$PB^2 + PF^2 = PG^2 + PC^2$$

Ausserdem gilt nach Konstruktion $PH^2 = PE^2$ und $PD^2 = PG^2$. Addieren der drei Gleichungen und anschliessendes Kürzen ergibt $PF^2 = PI^2$ und somit liegt P auf der Mittelsenkrechten von FI. $\square$

2.3 Komplexe Zahlen

Die Geometrie mit komplexen Zahlen unterscheidet sich in einem wesentlichen Punkt von der Vektorgeometrie: die Multiplikation ist grundsätzlich anders. Während das (Skalar)Produkt zweier Vektoren eine reelle Zahl ergibt, ist das Produkt von zwei komplexen Zahlen wieder eine komplexe Zahl.

Aber beginnen wir von vorne. Wir nehmen an, dass der Leser bereits von komplexen Zahlen gehört hat und die Rechenregeln kennt. Normalerweise werden komplexe Zahlen eingeführt als Ausdrücke der Form $a + bi$, wobei a, b reell und $i^2 \doteq -1$. Die imaginäre Einheit i hat etwas Mystisches, weil man sich das nicht so richtig vorstellen kann. Wir wollen uns nun den komplexen Zahlen von der geometrischen Seite nähern und definieren sie als 2-dimensionale Vekoren mit der gewohnten Addition. Die Multiplikation von zwei solchen Vektoren ist jedoch anders definiert

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1b_2 + b_1a_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Man kann leicht zeigen, dass dieses neue Produkt wohldefiniert, assoziativ und kommutativ ist. Es gibt ein neutrales Element $\binom{1}{0}$ und jeder Vektor $\binom{a}{b}$ besitzt ein inverses Element

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

Damit wir nicht immer Vektoren schreiben müssen, schreiben wir einfachheitshalber

$$1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a1 + bi = a + bi.$$

Es mag zuerst etwas seltsam erscheinen, dass wir hier die '1' neu definiert haben, beachte aber, dass es sich strenggenommen um zwei verschiedene Sachen handelt. Die 1 im Vektor drin ist das neutrale Element der bekannten reellen Zahlen. Aus Mangel an Zeichen haben wir einfach wieder die 1 für das neutrale Element der komplexen Zahlen gewählt. Weil die 1 der komplexen Zahlen genau die gleichen Eigenschaften hat, wie das vertraute 1, passt auch alles wunderbar zusammen und man muss sie gar nicht unterscheiden.
Wir sind nun übrigens bei den komplexen Zahlen angelangt. Zur Kontrolle berechnen wir umständlich mit der Gleichung (5)

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Wir können somit die Definition von (5) wieder vergessen und berechnen Produkte wie gewohnt einfach durch ausmultiplizieren, z.B gibt

$$(5+2i)\cdot(3-i) = 15 - 5i + 6i - 2i^2 = 17 + i.$$

Wir greifen nun wieder auf unser Vorwissen über kompexe Zahlen zurück. Man kann diese auf verschiedene Arten darstellen

$$z = a + bi = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = re^{i\varphi}, \tag{6}$$

wobei $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$. Für das Produkt von zwei komplexen Zahlen erhalten wir

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

und sehen, dass dabei die Beträge multipliziert und die Winkel zur reellen Achse (die x-Achse bei (5)) addiert werden. Bevor wir mit der richtigen Geometrie anfangen, führen wir noch die Konjugation ein. Sei z eine beliebige komplexe Zahl, wie sie in (6) dargestellt ist. Die zu z konjugierte Zahl $\overline{z}$ sei dann

$$\overline{z} = a - bi = r(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)i) = re^{-i\varphi}.$$

$\overline{z}$ ist das Bild von z bei der Spiegelung an der reellen Achse. Der Betrag einer komplexen Zahl sieht anders aus als der Betrag eines Vektors:

$$|z|^2 \neq z^2 \qquad \text{, sondern} \quad |z|^2 = z\overline{z}.$$

Der grosse Vorteil der komplexen Zahlen gegenüber den Vektoren besteht darin, dass sich mit den komplexen Zahlen auch Drehungen um Winkel wie $60°, 90°, 45°, \ldots$ darstellen und berechnen lassen.

Beispiel 9. *Die gleichschenkligen Dreiecke ABP, BCQ, CDR und DAS werden ausserhalb auf die Seiten des Vierecks $ABCD$ konstruiert. Die Schwerpunkte der Dreiecke CDR und DAS seien M bzw. N und das gleichseitige Dreieck MNT habe den gleichen Umlaufsinn wie $ABCD$. Finde die Winkel von $\triangle PQT$.*

Lösung. Wir benennen $\epsilon = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, da diese komplexe Zahl im Beweis sehr oft verwendet wird. Eine Multiplikation mit ϵ entspricht einer Drehung der kompexen Zahl um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn. Eine Multiplikation mit ϵ^5 entspricht einer Drehung um $60°$ im Uhrzeigersinn und aus dem Einheitskreis liest man ebenfalls leicht ab

$$\epsilon^6 = 1 \qquad \epsilon^3 = -1 \qquad \epsilon - 1 = \epsilon^2 \qquad 1 - \epsilon = \epsilon^5.$$

Wir werden diese und ähnliche Identitäten im folgenden ohne weitere Erwähnung rege benützen (bei den Berechnungen immer den Einheitskreis betrachten). Zur besseren Unterscheidung von Vektoren und komplexen Zahlen verwenden wir für die komplexen Zahlen ausschliesslich kleine Buchstaben. Seien also a, b, c, d die Ecken des Vierecks (in der Ebene der komplexen Zahlen). Für p erhalten wir

$$p = b + (a-b)\cdot\epsilon = a\epsilon + b(1-\epsilon) = a\epsilon + b\epsilon^5,$$

da der Vektor $\overrightarrow{BP}$ aus einer Drehung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn hervorgeht. Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir

$$q = b\epsilon + c\epsilon^5 \qquad r = c\epsilon + d\epsilon^5 \qquad s = d\epsilon + a\epsilon^5.$$

Nun berechnen wir die Schwerpunkte

$$m = \frac{1}{3}(c+d+r) = \frac{1}{3}(c(1+\epsilon) + d(1+\epsilon^5)) \qquad n = \frac{1}{3}(d(1+\epsilon) + a(1+\epsilon^5)).$$

Für t haben wir auf den Umlaufsinn zu achten

$$\begin{aligned} t = m + (n-m)\epsilon &= \frac{1}{3}(c(1+\epsilon) + d(1+\epsilon^5) + a(\epsilon+1) - c(\epsilon-\epsilon^5) - d(\epsilon^5+1)) \\ &= \frac{1}{3}a(1+\epsilon) + \frac{1}{3}c(1+\epsilon^5). \end{aligned}$$

Da wir uns für das Dreieck PQT interessieren, berechnen wir die Vektoren $\overrightarrow{TP}$ und $\overrightarrow{TQ}$ und hoffen, dass wir so mehr erfahren.

$$\overrightarrow{TP} = p - t = \frac{2}{3}a\epsilon - \frac{1}{3}a + b\epsilon^5 - \frac{1}{3}c(1+\epsilon^5) = \qquad \frac{1}{3}a(2\epsilon-1) + b\epsilon^5 - \frac{1}{3}c(1$$

$$\overrightarrow{TQ} = q - t = -\frac{1}{3}a(1+\epsilon) + b\epsilon + \frac{2}{3}c\epsilon^5 - \frac{1}{3}c = -\frac{1}{3}a(1+\epsilon) + b\epsilon + \frac{1}{3}c(2\epsilon^5 - 1).$$

Motiviert von den Koeffizienten von b vermuten wir, dass $\overrightarrow{TP}\epsilon^2 = \overrightarrow{TQ}$ und prüfen dies für die anderen Koeffizienten nach

$$\begin{aligned} (2\epsilon - 1)\epsilon^2 &= -(1+\epsilon) \\ \Leftrightarrow \quad -2 - \epsilon^2 &= -1 - \epsilon \\ \Leftrightarrow \quad \epsilon^5 &= 1 - \epsilon, \end{aligned}$$

was offensichtlich stimmt. Somit ist $\triangle PQT$ gleichschenklig mit $TP = TQ$ und $\angle PTQ = 120°$. □

2.4 Kartesische Koordinaten

Jede Geometrieaufgabe liesse sich grundsätzlich mit Kartesischen Koordinaten (das gewohnte Koordinatensystem) in eine algebraische Aufgabe verwandeln. In den allermeisten Fällen, werden jedoch die Terme so gross und kompliziert, dass man es kaum schafft, die Aufgabe so zu lösen. Bei sorgfäligem Vorgehen, gibt es jedoch durchaus Aufgaben, die man mit sinnvollem Aufwand so lösen kann.

Beispiel 10. *Im Dreieck ABC mit Höhenschnittpunkt H sei $AB \neq AC$. Die Punkte B', C' seien die Höhenfusspunkte der Höhen durch B bzw. C und M sei der Mittelpunkt der Seite BC. Die Gerade $B'C'$ schneide BC in D. Zeige*

$$AM \perp DH.$$

Lösung. Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem ein. Als Ursprung wählen wir den Punkt B und die x-Achse legen wir durch BC. Die Punkte im System haben nun die folgenden Koordinaten

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch a, b, c ist das System vollständig bestimmt, d.h. wir können d und h durch a, b und c ausdrücken und mit etwas Glück werden diese Ausdrücke nicht allzu kompliziert. Bevor wir dies tun, können wir oBdA annehmen, dass $a, b, c > 0$ und $a \geq \frac{c}{2}$ (man erreicht dies durch Spiegeln und Umbenennen).
Wir bezeichnen die Eckwinkel bei B und C mit β bzw. γ. Es gilt $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ und $\tan(\gamma) = \frac{b}{c-a}$. Um d zu berechnen, wenden wir den Sinussatz im $\triangle BDC'$ an

$$\frac{d}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{c \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma - \beta)} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{c \cdot \cos(\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma)} = \frac{c}{1 - \frac{\tan(\beta)}{\tan(\gamma)}} = \frac{ac}{2a - c}.$$

Sei A' der Höhenfusspunkt der Höhe durch A. Im Dreieck $BA'H$ gilt

$$\tan(\angle A'HB) = \frac{a}{h} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{a}{\tan(\gamma)} = \frac{a(c-a)}{b}.$$

Seien m_{AM} und m_{DH} die Steigungen der Geraden AM bzw. DH. Die Geraden liegen genau dann rechtwinklig zueinander, wenn das Produkt der Steigungen -1 ergibt. Wir berechnen also

$$m_{AM} \cdot m_{DH} = \frac{b}{a - \frac{c}{2}} \cdot \frac{\frac{a(c-a)}{b}}{a - \frac{ac}{2a-c}} = \frac{a(c-a)(2a-c)}{\frac{1}{2}(2a-c)(a(2a-c) - ac)} = \frac{ac - a^2}{\frac{1}{2}(2a^2 - ac - ac)} = -1.$$

□

3 Geometrische Ungleichungen

Um Geometrische Ungleichungen zu beweisen, kann man unter anderem auf das folgende Repertoire zurückgreifen. Zu jedem Punkt gibt es eine Übungsaufgabe, genauere Ausführungen zu einigen Punkten findest du weiter unten.

(i) **Dreiecksungleichung.** $AB + BC \geq AC$ für beliebige Punkte A, B, C.

Übung. Im Dreieck ABC sei u der Umfang und s_a, s_b, s_c die Längen der Schwerlinien durch A, B bzw. C. Zeige

$$\frac{3}{4}u \leq s_a + s_b + s_c \leq u.$$

(ii) Im $\triangle ABC$ seien α, β, γ wie üblich die Eckwinkel und a, b, c die Seitenlängen. Es gilt

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq \beta.$$

Dies folgt aus dem Sinussatz und der Winkelsumme im Dreieck. Für $\alpha = 90°$ haben wir im Speziellen, dass die Hypotenuse immer die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist.

Übung (IMO 2001/1)**.** Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. P sei der Höhenfusspunkt der Höhe durch A.
Nehmen wir an, es gelte $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$. Beweise, dass $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

(iii) **Geometrische Identitäten.** Es gibt ganz viele nützliche Formeln und Sätzchen, wie z.B. die Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks. Eine kleine Übersicht findest du weiter unten.

Übung. Für ein Dreieck ABC mit Seitenlängen a, b, c zeige

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}[ABC].$$

(iv) **Trigonometrische Identitäten.** Additionstheoreme, Halbwinkelsätze und Summen-Produkt-Formeln findest du in Kapitel 2.1. Beim Multiplizieren und Kürzen von Ungleichungen mit trigonometrischen Funktionen muss man darauf achten, dass diese auch negativ werden können.

Übung. Zeige für beliebige Winkel x gilt

$$\sin(x) + \sin(60° - x) \leq 1.$$

(v) **Algebraische Ungleichungen.** Die Mittel, Cauchy-Schwarz, ...

Übung. Gegeben ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC mit Seitenlängen a, b bzw. c. Seien x, y, z die Abstände von P zu BC, CA bzw. AB. Finde den Punkt P, für welchen der folgende Ausdruck minimal ist

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

(vi) **Transformationen und Konstruktionen.** Wie immer kann sich eine Aufgabe durch eine geeignete Transformation/Konstruktion z.T. erheblich vereinfachen. Weiter unten findest du ein Beispiel.

Übung. Ein Fluss F verzweige sich in zwei gerade Flüsse F_1 und F_2. Die beiden Ortschaften A und B liegen unterhalb der Verzweigung, so dass sie durch F_1 und F_2 getrennt werden. Über F_1 und F_2 sollen nun je eine Brücke gebaut werden, so dass der Fussweg zwischen A und B möglichst kurz ist. Brücken können nur rechtwinklig über einen Fluss führen.

(vii) **Ptolemäus.** Für vier Punkte A, B, C, D in der Ebene gilt

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, oder wenn A, B, C, D in dieser Reihenfolge (oder zyklisch vertauscht) auf einer Geraden liegen (Beweis weiter unten).

Übung (Russland 2001)**.** Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Höhen AD, BE, CF. Die Punkte P, Q und R liegen auf den Strecken AD, BE bzw. CF, so dass $[ABR] + [BCP] + [CAQ] = [ABC]$. Zeige, dass die Punkte P, Q, R und H auf einem Kreis liegen.

(viii) **Ungleichung von Erdös-Mordell.** Sei P ein beliebiger Punkt innerhalb des Dreiecks ABC und seien D, E, F die Projektionen von P auf BC, CA bzw. AB. Es gilt

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF).$$

Gleichheit gilt nur dann, wenn P der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC ist (Beweis weiter unten).

Übung. (IMO 91/5) Zeige, dass für jeden Punkt P im Dreieck ABC einer der Winkel $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ höchstens $30°$ misst.

3.1 Geometrische Identitäten

Hier noch eine Zusammenstellung von Formeln und Identitäten im Dreieck. Wir geben keine Beweise und ihr dürft sie an der IMO auch benützen ohne sie zu beweisen. Schreibt dann einfach hin „es ist allgemein bekannt, dass...“ oder noch besser „es weiss ja jedes Kind, dass...“. Je mehr man weiss, desto besser.

Wie üblich sei ABC ein Dreieck mit Seiten $BC = a, CA = b, AB = c$; Winkel α, β, γ; Schwerlinien s_a, s_b, s_c; Höhen h_a, h_b, h_c; Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c; Ankreisradien r_a, r_b, r_c; Schwerpunkt S; Höhenschnittpunkt H; Umkreismittelpunkt O; Inkreismittelpunkt I; halber Umfang $s = \frac{a+b+c}{2}$; Umkreisradius R; Inkreisradius r und Fläche $[ABC]$. Die Sätze gelten immer auch für zyklische Vertauschungen.

(i) **Eigenschaft der Winkelhalbierenden.** Die Winkelhalbierende durch A schneidet die Seite BC im Verhältnis $\frac{AB}{AC}$.

(ii) **Eigenschaft der Schwerlinien.**

$$\frac{AS}{SM_a} = 2.$$

(iii) **Eulersche Gerade.** H, S und O liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden und es gilt

$$\frac{HS}{SO} = 2.$$

(iv) **Neun-Punkte-Kreis.** Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfusspunkte und die Mittelpunkte der Strecken HA, HB, HC (sog. Eulerpunkte) liegen auf einem Kreis, dem sog. Neun-Punkte-Kreis oder Eulerkreis.

(v) **Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten.** Die Winkelhalbierende durch A schneidet die Mittelsenkrechte von BC auf dem Umkreis.

(vi) **Verschiedene Formeln für die Fläche.**

$$\begin{aligned}
[ABC] &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{ab}{2}\sin(\gamma) \qquad \text{(klar)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{(Heron)} \\
&= r \cdot s \qquad \text{(wichtig)} \\
&= r_a(s-a) \\
&= \frac{abc}{4R} \qquad \text{(wichtig)} \\
&= 2R^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma).
\end{aligned}$$

(vii) **Heron für Sehnenvierecke.** Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Seitenlängen a, b, c, d. Der halbe Umfang sei wiederum $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Es gilt

$$[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

3.2 Transformationen und Konstruktionen

Beispiel 11. *Gegeben ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Welches Dreieck XYZ mit Eckpunkten auf BC, CA bzw. AB hat den kleinsten Umfang?*

Lösung. A und Z gespiegelt an BC seien A_1 bzw. Z_1 und B, Z gespiegelt an CA seien B_2 bzw. Z_2. Der Umfang von $\triangle XYZ$ ist gleich $Z_1X + XY + YZ_2$ und ist minimal, wenn Z_1, X, Y, Z_2 auf einer Geraden liegen. Dies ist nur dann der Fall, wenn jeweils zwei Seiten von $\triangle XYZ$ zu der benachbarten Seite von $\triangle ABC$ den gleichen Winkel einschliessen, was nur dann der Fall ist, wenn X, Y, Z die Höhenfusspunkte von $\triangle ABC$ sind. □

3.3 Beweis von Ptolemäus

Satz 3.1 (Ptolemäus). *Für vier verschiedene Punkte A, B, C, D in der Ebene gilt*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, oder wenn A, B, C, D in dieser Reihenfolge (oder zyklisch vertauscht) auf einer Geraden liegen.

Beweis. Es gibt einen sehr schönen, elementaren Beweis, der nur die Dreiecksungleichung und ähnliche Dreiecke verwendet. Zur Übung benützen wir jedoch komplexe Zahlen. Seien also a, b, c, d vier beliebige Punkte. Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a) = (c-a)(d-b).$$

Somit gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|c-a| \cdot |d-b| = |(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a)| \leq |b-a| \cdot |d-c| + |c-b| \cdot |d-a)|.$$

Damit ist Ptolemäus bewiesen. Gleichheit gilt genau dann, wenn $(b-a)(d-c)$ und $(c-b)(d-a)$ in die gleiche Richtung zeigen, d.h. wenn ihr Quotient eine positive reelle Zahl ist

$$\frac{b-a}{d-a} \cdot \frac{d-c}{c-b} \in \mathbb{R}^+.$$

Sei α der Winkel von $\frac{b-a}{d-a}$ zur reellen Achse (man sagt auch α ist das Argument von $\frac{b-a}{d-a}$) und β sei das Argument von $\frac{d-c}{c-b}$. Dies bedeutet, dass α der gerichtete Winkel $\angle DAB$ ist. Wir haben nun $\alpha + \beta = 0°$. Ist $\alpha = \beta = 0°$, liegen die Punkte auf einer Geraden, andernfalls liegen sie nach dem Tangentenwinkelsatz auf einem Kreis. □

3.4 Beweis von Erdös-Mordell

Satz 3.2 (Erdös-Mordell). *Sei P ein beliebiger Punkt innerhalb des Dreiecks ABC und seien D, E, F die Projektionen von P auf BC, CA bzw. AB. Es gilt*

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF).$$

Gleichheit gilt nur dann, wenn P der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC ist.

Beweis. Dass der Gleichheitsfall nur in einem ganz speziellen Dreieck auftritt, ist ein Hinweis darauf, dass der Beweis in zwei Schritten abläuft, wobei die Gleichheitsbedinungen der beiden Teilschritte verschieden sind. Dies ist der Fall. Wir zeigen zuerst

$$PA \geq \frac{AB}{BC} PE + \frac{CA}{BC} PF. \tag{7}$$

Mit Hilfe des Sinussatzes schreiben wir diese Gleichung um zu

$$PA \sin(\alpha) \geq PE \sin(\gamma) + PF \sin(\beta). \tag{8}$$

Es ist nun wichtig, dass man sieht $PA \sin(\alpha) = EF$. Man kann dies wiederum über den Sinussatz zeigen. Weiter ist die rechte Seite von (8) gleich der Länge der Projektion von EF auf die Seite BC. Damit wird die Ungleichung offensichtlich und Gleichheit gilt, wenn EF und BC parallel sind.

Summieren wir nun über alle zyklischen Vertauschungen von (7)

$$PA + PB + PC \geq PD \left(\frac{CA}{AB} + \frac{AB}{CA} \right) + PE \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) + PF \left(\frac{BC}{CA} + \frac{CA}{BC} \right).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Seiten von $\triangle DEF$ parallel zu den Seiten von $\triangle ABC$ sind. Man kann zeigen, dass dies nur dann der Fall ist, wenn P der Umkreismittelpunkt ist (dies zu zeigen wird dem Leser überlassen).

Für den zweiten Schritt wenden wir einfach noch AM-GM auf die Ausdrück in Klammer an und erhalten die Ungleichung von Erdös-Mordell. $\square$