Geometrie III - Aufgaben

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Pappus

1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und die Höhenfusspunkte der Höhen durch B und C seien P bzw. Q. Zeige, dass sich die Tangenten an den Umkreis von $\triangle APQ$ bei P und Q auf BC schneiden.
2. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit Inkreis k. k berühre AB, BC, CD, DA in den Punkten M, N, P bzw. Q. Zeige, dass sich die Geraden AC, BD, MP, NQ in einem Punkt schneiden.
3. Die Eckpunkte des konvexen Vierecks $ABCD$ liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt O. Zudem habe $ABCD$ einen Inkreis mit Mittelpunkt I. Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in P. Zeige, dass O, I und P auf einer Geraden liegen.

2 Rechnen

Trigonometrie

1. Für ein beliebiges Dreieck mit den Eckwinkeln α, β, γ gilt

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$$

und

$$\cot(\alpha/2) + \cot(\beta/2) + \cot(\gamma/2) = \cot(\alpha/2) \cdot \cot(\beta/2) \cdot \cot(\gamma/2).$$

2. Auf einer Kreislinie k liegen drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C. Die Geraden h und g stehen im Punkt B bzw. C auf der Sehne BC senkrecht. Die Mittelsenkrechte der Sehne AB schneide die Gerade h im Punkt F, die Mittelsenkrechte von AC schneide g in G. Man beweise, dass das Produkt $|BF| \cdot |CG|$ von der Lage des Punktes A unabhängig ist, wenn die Punkte B und C festgehalten werden.
3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ein Kreis k habe den Mittelpunkt auf der Strecke AB und die Geraden BC, CD und DA liegen tangential an k. Zeige

$$AD + BC = AB.$$

TrigCeva

1. Fast wichtiger als der Satz von Ceva selber ist die trigonometrische Form davon, bekannt unter dem Namen TrigCeva. P, Q, R seien Punkte auf den Strecken BC, CA bzw. AB. Die Geraden AP, BQ, CR schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn gilt
$$\frac{\sin(\angle BAP)}{\sin(\angle PAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBQ)}{\sin(\angle QBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACR)}{\sin(\angle RCB)} = 1.$$

2. Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. D, E, F seien die Projektionen von I auf BC, CA bzw. AB. M, N, P seien Punkte auf den Strecken EF, FD bzw. DE. Zeige, dass sich die Geraden AM, BN, CP genau dann in einem Punkt schneiden, wenn sich die Geraden DM, EN, FP in einem Punkt schneiden.

Vektoren

1. Sei $ABCDEF$ irgendein Sechseck und seien $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, BCD, CDE, DEF, EFA bzw. FAB. Zeige, dass die gegenüberliegenden Seiten im Sechseck $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ parallel und gleich lang sind.

2. Die Diagonalen eines Vierecks stehen genau dann rechtwinklig aufeinander, wenn die Summe der Quadrate zweier gegenüberliegender Seiten gleich gross ist.

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Betrachte die Geraden, die durch den Mittelpunkt einer Seite gehen und rechtwinklig auf der gegenüberliegenden Seite stehen. Dabei werden die Diagonalen als zwei gegenüberliegende Seite angesehen. Zeige, dass sich diese sechs Geraden in einem Punkt treffen.

4. Sei P ein Punkt im Innern eines gegebenen Kreises k. Zwei Strahlen mit Ursprung P, welche senkrecht aufeinander stehen, schneiden k in den Punkten A und B. Sei Q der Punkt, so dass $PAQB$ ein Rechteck ist. Finde den geometrischen Ort von Q, für alle solchen Paare von Strahlen.

5. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Zeige, dass es genau einen Punkt X gibt, so dass die Summe der Quadrate der Seiten der Dreiecke XAB, XBC, XCA alle gleich sind.

Zu Beispiel 7 (Seite 9)

1. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $a = AB, b = BC, e = AC$ und $f = BD$. Zeige
$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

2. Sei $ABCD$ ein konvexes Trapez mit $AB \parallel CD$. Sei $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC$ und $f = BD$. Zeige
$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

3. Sei ABC ein Dreieck und D der Mittelpunkt von BC. Sei $a = BC, b = CA, c = AB$ und $s_a = AD$. Zeige
$$s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

4. Gleiche Situation wie bei der vorherigen Aufgabe. Sei S der Schwerpunkt von $\triangle ABC$. Zeige
$$AS \perp BS \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Komplexe Zahlen

1. (Napoleon) Drei gleichseitige Dreiecke werden ausserhalb auf die Seiten eines beliebigen Dreiecks konstruiert. Zeige, dass die Schwerpunkte dieser Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.

2. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Eine zu AC parallele Gerade schneide AB und BC in M bzw. P. Sei D der Schwerpunkt von $\triangle PMB$ und E der Mittelpunkt von AP. Finde die Winkel von $\triangle DEC$.

3. Die Diagonalen des konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden sich in O. Seien S_1 und S_2 die Schwerpunkte von $\triangle AOB$ bzw. $\triangle COD$ und H_1, H_2 die Höhenschnittpunkte von $\triangle BOC$ bzw. $\triangle DOA$. Zeige
$$S_1S_2 \perp H_1H_2.$$

4. $\triangle OAB$ und $\triangle OA'B'$ seien zwei gleichseitige Dreiecke mit gleichem Umlaufsinn. Der Schwerpunkt von $\triangle OAB$ sei S und die Mittelpunkte von $A'B$ und AB' seien M bzw. N. Zeige $\triangle SMB' \sim \triangle SNA'$.

5. Gegeben seien ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein Punkt D innerhalb des Dreiecks, so dass $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ und $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

   (i) Man berechne
   $$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

   (ii) Man beweise, dass die Tangenten an die Umkreise der Dreiecke ACD und BCD im Punkt C aufeinander senkrecht stehen.

Kartesische Koordinaten

1. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$ und sei P ein Punkt auf der Geraden BC. Die Punkte X und Y liegen auf AB bzw. AC, so dass
   $$PX \parallel AC \qquad PY \parallel AB.$$
   Weiter sei T der Mittelpunkt des Bogens BC ($T \neq A$). Zeige $PT \perp XY$.

2. Gegeben zwei konzentrische Kreise mit Radien $R > r$. Sei P ein fester Punkt auf dem kleineren und B ein mobiler Punkt auf dem grösseren Kreis. Die Gerade BP schneide den grösseren Kreis nochmals in C. Die Rechtwinklige zu BP durch P schneide den kleineren Kreis nochmals in A.

   (i) Finde alle Werte, die der Ausdruck $BC^2 + CA^2 + AB^2$ annehmen kann.

   (ii) Finde den geometrischen Ort des Mittelpunktes von BC.

3 Geometrische Ungleichungen

1. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in den verschiedenen Punkten P und Q schneiden. Konstruiere eine durch P verlaufende Strecke AB mit ihren Endpunkten auf k_1 und k_2, sodass das Produkt $AP \cdot PB$ maximal ist.

2. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. Die Geraden AP, BP und CP schneiden die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten X, Y bzw. Z. Beweise, dass gilt

$$XY \cdot YZ \cdot ZX \geq XB \cdot YC \cdot ZA.$$

3. Sei d der Abstand zwischen dem Umkreismittelpunkt und dem Schwerpunkt im Dreieck ABC und seien R und r der Umkreis- bzw. Inkreisradius. Zeige

$$d^2 \leq R(R-2r).$$

4. Seien a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige

$$b^2c(b-c) + c^2a(c-a) + a^2b(a-b) \geq 0.$$

5. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, so dass

$$AB \parallel DE \qquad BC \parallel EF \qquad CD \parallel FA.$$

Seien R_A, R_B, R_C die Umkreisradien der Dreiecke FAB, BCD bzw. DEF und sei P der Umfang des Sechsecks. Zeige

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{P}{2}.$$

Weitere Aufgaben

1. Sei O der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$, sei D der Mittelpunkt von AB und sei E der Schwerpunkt von $\triangle ACD$. Zeige

$$CD \perp OE \quad \Leftrightarrow \quad AB = AC.$$

2. Gegeben drei verschiedene Punkte A, B und C, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Sei k ein Kreis durch A und C, wobei der Mittelpunkt von k nicht auf AC liegt. Die Tangenten an k durch A und C schneiden sich in P und die Strecke PB schneidet k in Q.
Zeige, dass der Schnittpunkt von AC mit der Winkelhalbierenden von $\angle AQC$ unabhängig von der Wahl von k ist.

3. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O, Umkreisradius R, Inkreismittelpunkt I und Inkreisradius r. Zeige

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

4. Alle Geometrieaufgaben der IMOs der letzten zehn Jahre.