Geometrie II - Aufgaben (unfinished)

Aktualisiert: 1. Januar 2020
vers. 3.0.0

2 Working Backward

Einstieg

2.1 Sei $ABCD$ ein Viereck mit $CD = DA \doteq s$. Alle Winkel des Vierecks seien bekannt:

$$\angle DAB = 40^\circ \quad \angle ABC = 80^\circ \quad \angle BCD = 80^\circ \quad \angle CDA = 160^\circ$$

Zeige $BC = s$.

Tipp: Verschiebe die Strecke DA um den Vektor $\overrightarrow{DC}$ und definiere einen Punkt B' auf BC mit $CB' = s$. Wenn du jetzt zeigen kannst, dass $\angle CB'A = 80^\circ$ gilt, bist du fertig (da der Ortsbogen für 80° über der Strecke AC die Gerade BC neben C nur noch in einem weiteren Punkt schneiden kann).

Tipp: Definiere X, sodass DCX ein gleichschenkliges Dreieck ist.

2.2 Gegeben ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelpunkt A. Sei D der Mittelpunkt der Seite AC und sei E die Projektion von D auf BC. Der Mittelpunkt von DE sei F. Zeige, dass die Geraden BF und AE genau dann senkrecht aufeinander stehen (und nur dann), wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Tipp: (Slo 2005/III/3) Starte mit einem gleichseitigen Dreieck entweder über ähnliche Dreicke oder indem du die Steigungen der Geraden berechnest, kannst du zeigen, dass BF und AE senkrecht aufeinander stehen. Verschiebe nun A entlang der Senkrechten zu BC. Wie ändert sich dabei der Winkel zwischen den beiden Geraden?

Fortgeschritten

2.3 Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass gilt $AB + CD = BC$. Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle DAB$ und $\angle CDA$ auf der Seite BC zu liegen kommt.

Tipp: (SMO 2004/9) Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt P auf BC mit $BP = BA$ und $CP = CD$. Definiere dann den Punkt W als Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und beweise, dass W auf der Winkelhalbierenden von $\angle CDA$ liegt.

2.4 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Eine Gerade durch A treffe die Kreise nochmals in den Punkten C und D. Seien P und Q die Projektionen von B auf die Tangenten bei C bzw. D. Zeige, dass die Gerade PQ tangential zum Kreis mit Durchmesser AB liegt.

Tipp: Die Vermutung, auf die man hier erst kommen muss, ist, dass der Berührungspunkt auch auf der Geraden CD liegt. Definiere also S als Schnittpunkt von CD und dem Kreis mit Durchmesser AB. Beweise nun erstens, dass die Punkte P, Q und S auf einer Geraden liegen und zweitens $\angle QSD = \angle SBA$. Dies impliziert, dass PQ tangential am Kreis mit Durchmesser AB liegt. Wie so oft solltest du auf Sehnenvierecke zu achten!

Olympiade

2.5

3 Ähnliche Dreiecke

Einstieg

3.1 In $\triangle ABC$ sei D ein beliebiger Punkt auf der Strecke AB. Sei E der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen von BC durch D und F sei der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen von CD durch E. Wie lang ist DB, wenn $AF = 4$ und $FD = 6$ bekannt sind?

Tipp: Zweimal Strahlensatz beim Scheitelpunkt A ergibt $DB = 15$.

3.2 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Schnittpunkt von AC und BD. Zeige

$$\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}.$$

3.3 Der Punkt Z liege auf der Seite BC des Dreiecks $\triangle ABC$. Sei X der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen von AZ durch B und Y sei der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Parallelen von AZ durch C. Zeige

$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CY}.$$

Tipp: Wende zweimal den zweiten Strahlensatz an, einmal beim Scheitelpunkt B, einmal beim Scheitelpunkt C.

Fortgeschritten

3.4 Sei AB eine Sehne im Kreis k und P ein weiterer Punkt auf k. Sei Q die Projektion von P auf die Gerade AB und seien R und S die Projektionen von P auf die Tangenten an k durch A bzw. B. Zeige, dass PQ das geometrische Mittel von PR und PS ist.

Tipp: Zeige mit Winkeljagd, dass die beiden Dreiecke PRQ und PQS ähnlich sind. Du brauchst dazu die Sehnenvierecke $PRAQ$ und $PQBS$.

3.5 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und P der Schnittpunkt von AB und CD. Zeige

$$\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AP}{BP}.$$

Tipp: Drücke die Strecke PC auf 2 verschiedene Arten mithilfe von 2 verschiedenen Paaren von ähnlichen Dreiecken aus.

Olympiade

3.6

3.7 Die beiden Sehnen AB und CD schneiden sich innerhalb des Kreises in E. Sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke BE. Die Tangente t durch E an den Kreis durch D, P und E schneide die Geraden BC und AC in F bzw. G. Sei $q = \frac{AP}{AB}$, finde $\frac{EG}{EF}$ als Funktion von q (Ein Ansatz findest du bei Beispiel 4 (S. 6) im Geometrie I - Skript).

Tipp: (IMO 1990/1) Schau dir Beispiel 4 im Geometrie I - Skript an. Weitere Winkeljagd an dieser Figur liefert zwei Paare von ähnlichen Dreiecken. Eines ist z.B. $\triangle PAD \sim \triangle ECB$. Kombiniert man alles zusammen, bekommt man

$$\frac{EG}{EF} = \frac{PA}{PB} = \frac{q}{1-q}.$$

4 Trigonometrie

Eine gute Referenz für alle Trigonemtrie Aufgaben ist die Arbeit von Titu Andrescu und Zuming Feng : *103 Trigonometry Problems, from the training of the USA IMO Team.*

Einstieg

4.1 Berechne alle Seiten des Dreieckes ABC (es sind mehrere Lösungen möglich), wobei

- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 5\sqrt{3}$ et $\gamma = 45°$,
- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 5$ et $\gamma = 45°$,
- $c = 5\sqrt{2}$, $a = 15$ et $\gamma = 45°$.

4.2 Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Zeige, dass

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma).$$

4.3 Sei ABC ein Dreieck und R der Umkreisradius. Zeige, dass

$$4R = \frac{abc}{[ABC]}.$$

4.4 Beweise die Formel von Heron, welche es erlaubt die Fläche eines Dreiecks nur mit den Seitenlängen zu berechnen.

> **Theorem 41** (Heron)**.** *Sei ABC ein Dreieck. Also gilt*
>
> $$[ABC] = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

4.5 Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$- Seien D, E Punkte auf der Seite BC sodass gilt $BD = DE = EC$ und D befindet sich zwischen B und E. Zeige, dass $\angle DAE > \angle BAD$.

4.6 Beweise den Gleicheitsfall des folgenden Theoremes.

> **Theorem 42** (Ptolemäus)**.** *Seien A, B, C, D vier Punkte auf einer Ebene, also gilt :*
>
> $$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$
>
> *Der Gleichheitsfall tritt nur ein sobald alle vier Punkte auf einem Kreis liegen. ?*

4.7 Sei ABC ein Dreieck. Finde das Minimum des Audruckes

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{[ABC]}.$$

Fortgeschritten

4.8 Beweise das folgende Theorem:

> **Theorem 43** (Winkelhalbierendensatz). *Sei ABC ein Dreieck und D der Schnittounkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC. Zeige, dass*
> $$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

4.9 Sei ABC ein Dreieck. Die Tangenten an den Umkreis des Dreieckes ABC an B und C schneiden sich in D. Die Spiegelung der Gerade AD an der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$ schneidet BC in M. Zeige, dass M der Mittelounkt der Seite BC ist. (Anmerkung: Die Gerade AD ist der *Symedian* des Dreiecks ABC in A)

4.10 Vervollständige den Beweis von Ceva, das heisst, beweise, dass die Geraden sich in einem Punkt schneiden falls die notwendigen Streckenverhältnisse gegeben sind. (Anmerkung: Dafür braucht man keine Trigonometrie.)

4.11 Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheittelpunkt A. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ schneiden die Seiten BC und CA jeweils in D und E. Sei K der Mittelpunkt des Inkreises des Dreieckes ADC. Angenommen $\angle BEK = 45°$. Finde alle möglichen Werte von $\angle CAB$. (Anmerkung: Wie viele Freiheitsgrade hat dieses Problem?)

Olympiade

4.12 (IMO Shortlist 2001) Sei A_1 das Zentrum eines Quadrates in einem spitzwinkligen Dreieck ABC von welchem zwei Ecken sich auf den Seiten BC befinden. (Die anderen zwei Ecken sind also auf den Seiten AB und AC). Die Punkte B_1, C_1 sind auf die gleiche Weise definiert für ein Quadrat mit jeweils zwei Punkten auf den Seiten AC und AB. Zeige, dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sich in einem Punkt schneiden.

4.13 (IMO Selektion 2018) Seient A, B, C und D vier Punkte auf einem Kreis in dieser Reihenfolge. Wir nehmen an, dass ein Punkt K auf der Strecke AB existiert sodass BD die Strecke KC halbiert und AC die Strecke KD halbiert. Finde den minimalen Wert, der $\left|\frac{AB}{CD}\right|$ haben kann.

4.14 (Shortlist 2003) Seien A, B, C drei Punkte auf einer Gerade ℓ mit dieser Reihenfolge. Sei Γ ein Kreis durch A und C wobei AC kein Durchmesser ist. Sei P der Schnittpunkt der Tangenten zu Γ durch A und C. Sei Q der Schnittpunkt von Γ mit PB. Sei M der Schnittpunkt von ℓ mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle AQC$. Zeige, dass M unabhängig von der Wahl des Kreises Γ ist.

5 Die Potenz eines Punktes und Potenzlinie

Einstieg

5.1 Seien k ein Kreis und A, B zwei Punkte mit derselben (gerichteten) Potenz an k. Zeige, dass dann A und B den gleichen Abstand zum Mittelpunkt von k haben.

Tipp: Versuche, die Potenzen an k durch den Kreisradius und die Abstände auszudrücken.

5.2 Gegeben seien drei Kreise und die Potenzlinien zu je zwei von ihnen. Zeige, dass sich diese drei Geraden entweder in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

Tipp: Nimm den Schnittpunkt von zwei Potenzlinien (falls dieser existiert). Die Potenz dieses Punktes zu allen drei Kreisen ist gleich gross, er liegt also auch auf der dritten Potenzlinie.

5.3 Sei P ein beliebiger Punkt im Innern des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ und H_a der Höhenfusspunkt der Höhe durch A. Die Punkte D, E, Q seien die Projektionen von P auf AB, AC bzw. AH_a. Zeige

$$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$

Tipp: In der Aufgabenstellung kommt das Produkt $AB \cdot AD$ vor. Sieht aus wie eine Potenz, aber zu welchem Kreis? Eine gute Wahl ist der Umkreis von $\triangle DBH_a$. Auf diesem Kreis liegt auch der Schnittpunkt von PD und AH_a, nennen wir ihn R. Weiter sei S der Schnittpunkt von PE mit AH_a. Mit dem Potenzsatz am Punkt A vereinfacht sich die Aufgabe auf eine Aussage über das Dreieck PRS.

5.4 Seien AD und BE Höhen im Dreieck ABC. Es gelte $CA \neq CB$. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB, H der Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ und F der Schnittpunkt von AB und DE. Zeige $FH \perp CM$.

Tipp: D und H liegen beide auf der Potenzlinie der Umkreise von $\triangle DEH$ und $\triangle ABH$. Zu zeigen bleibt so noch, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser beiden Kreise parallel zu CM ist.

5.5 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und N. Eine der beiden gemeinsamen Tangenten an die beiden Kreise berühre den ersten Kreis in P und den zweiten in Q. Zeige, dass die Dreiecke MNP und MNQ denselben Flächeninhalt haben.

Tipp: MN ist die Potenzlinie und halbiert somit die Gerade PQ. Grundfläche und Höhe sind somit gleich lang und damit sind auch die Flächen gleich.

Fortgeschritten

5.6 Auf der Strecke AB liegen die Punkte K und L, so dass gilt $AL^2 = AK \cdot AB$. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene mit $AP = AL$. Zeige, dass PL die Winkelhalbierende von $\angle KPB$ ist.

Tipp: AP ist tangential an den Umkreis von PKB, der Rest folgt mit Winkeljagd.

5.7 Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Zeichne die gleichschenkligen Dreiecke DBC, AEC, ABF ausserhalb von $\triangle ABC$, so dass BC, CA, AB jeweils die Basen sind. Zeige dass sich die Rechtwinkligen zu EF, FD, DE durch A, B bzw. C in einem Punkt schneiden.

Tipp: Betrachte die drei Kreise mit Mittelpunkten D, E bzw. F und Radien DC, EA bzw FB. Die drei gegebenen Rechtwinkligen sind nun gerade die Potenzlinien dieser Kreise und diese schneiden sich bekanntlich in einem Punkt.

5.8 Sei g eine beliebige Gerade und A und B zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von g. Ein Kreis k durch A und B schneide g in den Punkten P und Q. Für welchen solchen Kreis $k_{\min}$ ist die Strecke PQ minimal?

Tipp: Nach AM-GM ist die Summe von zwei Zahlen bei konstantem Produkt dann am kleinsten, wenn die beiden Zahlen gleich gross sind.

5.9 Das konvexe Viereck $ABCD$ sei einem Halbkreis s mit Durchmesser AB einbeschrieben. Die Geraden AC und BD schneiden sich in E und AD schneide BC in F. Die Gerade EF schneide s in G und AB in H. Zeige, dass E dann und nur dann Mittelpunkt der Strecke GH ist, wenn G Mittelpunkt der Strecke FH ist.

Tipp: Die Gerade EF schneidet AB rechtwinklig. Benutze dann ähnliche Dreiecke, um einen Zusammenhang zwischen den Punkten E und F herzustellen, z.B. eine Gleichung mit HE und HF und kombiniere das dann mit der Potenz von H.

5.10 Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. M und N seien zwei beliebige Punkte auf den Seiten AB bzw. AC. Die Kreise mit den Durchmessern BN und CM schneiden sich in den Punkten P und Q. Zeige, dass die Punkte P, Q und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen.

Tipp: Zeige, dass der Höhenschnittpunkt H auf der Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise liegt. Daraus folgt eine Gleichung mit gerichteten Strecken und dann mit der Umkehrung des Potenzsatzes das Gewünschte.

Olympiade

5.11 (Finalrunde 2019,7) Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 2 \cdot \angle ABC$. Nehme an, dass ein Punkt D im Inneren des Dreiecks ABC existiert, sodass $AD = BD$ und $CD = AC$. Zeige, dass $\angle ACB = 3 \cdot \angle DCB$.

Tipp: Führe den Schnittpunkt von der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und BC ein, welcher wir als X bezeichnen. Mit dem Potenzsatz folgt, dass CDX ähnlich zu CDB ist. Ausserdem sind X und D auf der Mittelsenkrechten von AB. Der Beweis vervollständigt sich mit Winkeljagd.

5.12 (IMO-Selektion 2019, 9) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Seien E und F die Höhenfusspunkte der Höhen von B respektive C, sowie M der Mittelpunkt der Strecke BC. Die Tangente an den Umkreis von ABC im Punkt A schneide die Gerade BC in P. Die Parallele zu BC durch A schneide die Gerade EF in Q. Zeige, dass die Geraden PQ und AM senkrecht aufeinander stehen.

Tipp: PQ ist die Potenzlinie von dem Thaleskreis mit Mittelpunkt M und dem Punkt A.

6 Ceva und Menelaus

Einstieg

6.1 Im Dreieck ABC sind D, E, F die Berührungspunkte mit dem Inkreis, sodass D auf BC, E auf CA und F auf AB liegt. Zeige dass die Geraden AD, BE, CF sich in einem Punkt schneiden.

Tipp:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

6.2 Es sei k ein Kreis und A, B seien zwei Punkte auf k. In diesen Punkten werden die Tangenten an k gezeichnet und im gleichen Umlaufsinn die gleich langen Tangentenabschnitte AP und BQ abgetragen. Beweise, dass die Strecke PQ von der Geraden AB halbiert wird.

Tipp: (CH 98/5) Sei S der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Wende nun Menelaos im Dreieck SPQ an.

6.3 Seien A, B und C drei Punkte auf einer Gerade. Wähle einen willkürlichen Punkt D in der Ebene und ein weiterer Punkt E auf DB. P ist der Schnittpunkt von AC mit der Geraden durch AE CD und CE AD. Zeige, dass P nur von A, B und C abhängt.

Tipp: Versuche $\frac{AP}{PC}$ zu finden. Dies gelingt, indem du Ceva und Menelaos im Dreieck ACD anwendest.

6.4 Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck und seien M, N, P, und Q jeweils Punkte auf AB, BC, CD, beziehungsweise DA. Zeige, dass MQ,NP und BD sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn MN, PQ und AC sich in einem Punkt schneiden.

Tipp: Sei S der Schnittpunkt von MQ, NP und BD und X der Schnittpunkt von AC und PQ. Das Vorgehen ist nun ähnlich wie beim Beweis von Desargues im Skript. Wir wollen mit Menelaos zeigen, dass M, N und X auf einer Geraden liegen, d.h.

$$\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CX}{XA} = -1.$$

Den ersten Faktor finden wir beim Menelaos in $\triangle ABD$, den zweiten in $\triangle BCD$ und den dritten in $\triangle ACD$. Multiplizieren, fertig. Die Umkehrung folgt aus der Symmetrie.

6.5 Seien A, B, C sowie D, E, F jeweils drei Punkte auf einer Gerade. Sei $G = BE \cap CF$, $H = AD \cap CF$ und $I = AD \cap BE$. Zeige, falls AI=HD und CH=GF, also $BI = GE$

Tipp: Benütze zwei Mal Menelaos im Dreieck GHI und vergleiche die Faktoren der beiden Gleichungen einzeln miteinander.

Fortgeschritten

6.6

Olympiade

6.7

7 Transformations du plan

Einstieg

7.1 (Finalrunde 2013) Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle ADC = \angle DBA$. Sei zudem E die Projektion von A auf BD. Zeige dass $BC = DE - BE$

7.2 Die gegenüberliegenden Seiten von dem Sechseck $ABCDEF$ sind parallel. Beweise dass alle Winkel von $ABCDEF$ gleich sind falls $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$.

7.3 Seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AD beziehungsweise BC eines Vierecks $ABCD$. Beweise dass AB parallel zu DC ist falls $2MN = AB + CD$.

7.4 Ziege dass der Schwerpunkt die Schwerelinien im Verhältnis 2 : 1 teilt.

7.5 (tournament of the Town, Frühling 2015) Die Punkte K und L befinden sich auf der Seite AB des Dreiecks ABC sodass $KL = BC$ und $AK = LB$. M ist der Mittelpunkt von AC. Zeige, dass $\angle KML = 90°$.

7.6 (IMO-Selektion 2007, 1) Sei $ABCD$ ein Trapez mit AB parallel zu CD und $AB > CD$. Die Punkte K und L befinden sich jeweils auf den Seiten AB und CD, sodass $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Die Punkte P und Q befinden sich auf der Strecke KL, sodass $\angle APB = \angle BCD$ und $\angle CQD = \angle ABC$. Zeige dass die Punkte P, Q, B und C auf einem Kreis liegen.

7.7 (IMO 2009, 2) Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Es seien P und Q innere Punkte der Seiten CA und AB. Ferner seien K,L und M die Mittelpunkte der Strecken BP, CQ bzw. PQ. Der Kreis Γ gehe durch K, L und M. Die Gerade PQ sei eine Tangente an den Kreis Γ. Man zeige, dass $|OP| = |OQ|$ gilt.

7.8 (Vorrunde 2019) Seien k_1 ein Kreis und l eine Gerade welche k_1 in zwei Punkten A und B schneidet. Sei k_2 ein zweiter Kreis ausserhalb von k_1 welcher k_1 in dem Punkt C und l an dem Punkt D berührt. Sei T der zweite Schnittpunktder Gerade CD mit k_1. Zeige, dass $AT = TB$.

7.9 (MEMO 2014, 5) Sei ABC ein Dreieck sodass $AB < AC$. Das Inkreiszentrum I berührt die Seiten BC, CA und AB jeweils in D, E und F. Die Winkelhalbierende AI schneidet DE und DF in x beziehungsweise Y. Sei Z der Fuss der Höhe durch A des Dreiecks ABC.

Zeige dass D das Zentrum des Kreises durch XYZ ist.

7.10 Seien A und B die Schnittpunkte von zwei Kreisen, k_1 und k_2. Sei Ω und ω zwei Kreise welche k_1 und k_2 in den Punkten $X = \Omega \cap k_1$, $Y = \Omega \cap k_2$, $Z = \omega \cap k_1$ und $V = \omega \cap k_2$ berührt. Zeige, dass die Umkreise von AXY und AZV sich in dem Punkt A mit einem Winkel von 90° schneiden.

7.11 (Théorème de Miquel) Seien A,B,C,D,E,F,G,H 8 Punkte sodass $ABCD$, $BCHG$, $EDCH$, $FADE$, $FABG$ Sehnenvierecke sind. Zeige, durch Inversion, dass $EFGH$ ein Sehnenviereck ist.

7.12 Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kreise und zudem sei ω_1 ein Kreis innerhalb von Ω_1 welcher Ω_1 in A und Ω_2 in B berührt und ω_2 ein Kreis innerhalb von Ω_2 welcher Ω_2 in C und Ω_1 in D berührt.

7.13 Sei ω ein Kreis innerhalb eines anderen Kreises Ω, welche sich in T berühren. Sei d eine Gerade welche die beiden Kreise in den Punkten A, B, C und D in dieser Reihenfolge berühren. Zeige, dass der Umkreis von TAB genau dann rechtwinklig an Ω im Punkt T ist, falls ATC ein Rechteck ist.

7.14 (IMO 96) Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks ABC sodass:

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Seien D und E die Umkreismittelpunkte der Kreise APB und APC. Zeige, dass AP, BD und CE sich in einem Punkt schneiden.

7.15 (référence nécessaire) Sei $Omega$ ein Kreis und ω_i für $i = 1, ..., 6$ sechs Kreise welche Ω in den Punkten P_i berühren und ω_i berührt ω_{i+1} für alle i und ω_6 berührt ω_1. Zeige, dass die Geraden P_1P_4, P_2P_5 und P_3P_6 sich in einem Punkt schneiden.

7.16 (IMO-Selektion 2014) Die zwei Kreise ω_1 und ω_2 berühren sich im Punkt A und liegen innerhalb des Kreises Ω. Dabei berührt ω_1 den Kreis Ω im Punkt B und ω_2 berührt Ω im Punkt C. Die Gerade AC schneidet ω_1 ein weiteres Mal im Punkt D. Zeige, dass DBC ein rechtwinkliges Dreieck ist, falls A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.