Géométrie II - Astuces

Actualisé: 3 février 2018
vers. 2.0.0

Triangles semblables

1. Appliquer deux fois de suite le théorème de Thalès au sommet A donne $DB = 15$.
2. Appliquer deux fois le deuxième théorème de Thalès, une fois au sommet B, une fois au sommet C.
3. Montrer avec de la chasse aux angles que les triangles PRQ et PQS sont semblables. Pour cela tu auras besoin des quadrilatères inscrits $PRAQ$ et $PQBS$.
4. (OMI 1990/1) Regarder l'exemple 4 dans le script de Géométrie I. Un peu de chasse aux angles supplémentaire donne deux paires de triangles semblables. L'une est par exemple $\triangle PAD \sim \triangle ECB$. En combinant le tout on obtient
$$\frac{EG}{EF} = \frac{PA}{PB} = \frac{q}{1-q}.$$

Working Backward

1. Translater le segment DA le long du vecteur $\overrightarrow{DC}$ et définir un point B' sur BC avec $CB' = s$. En arrivant à montrer que $\angle CB'A = 80°$, on a fini la preuve (car l'arc de cercle de $80°$ construit sur le segment AC ne peut couper la droite BC qu'en un seul autre point).
2. (Slo 2005/III/3) Commencer avec un triangle équilatéral. En cherchant des triangles semblables ou en calculant les pentes on peut montrer que BF et AE sont perpendiculaires. Déplacer ensuite A le long de la droite orthogonale à BC. Comment l'angle entre les deux droites change-t-il dans ce cas ?
3. (OSM 2004/9) Par hypothèse il existe un point P sur BC avec $BP = BA$ et $CP = CD$. Définir W comme étant le point d'intersection de BC avec la bissectrice de $\angle BAD$ et montrer que W se trouve sur la bissectrice de $\angle CDA$.
4. La première chose qu'on doit deviner ici est que le point de tangence se trouve sur la droite CD. Définissons donc S comme le point d'intersection de CD avec le cercle de diamètre AB. Montrons ensuite que les points P, Q et S sont alignés et puis que $\angle QSD = \angle SBA$. Cela implique que la droite PQ est tangente au cercle de diamètre AB. Comme souvent ça vaut la peine ici de chercher des quadrilatères inscrits !

La puissance d'un point

1. Essaye d'exprimer la puissance par rapport à k en fonction du rayon du cercle et de la distance au centre du cercle.

2. Dans l'énoncé on voit le produit $AB \cdot AD$ apparaître. Ca ressemble à une puissance, mais par rapport à quel cercle ? Un bon choix est le cercle circonscrit du triangle DBH_a. Le point d'intersection de PD avec AH_a se trouve également sur ce cercle, on va l'appeler R. Soit de plus S le point d'intersection de PE avec AH_a. Grâce au théorème de la puissance par rapport au point A, l'exercice se simplifie à un énoncé à propos du triangle PRS.

3. D'après AM-GM la somme de deux nombres dont le produit est constant est minimale si les deux nombres sont égaux.

4. La droite EF coupe AB perpendiculairement. Utiliser ensuite les triangles semblables pour obtenir des informations supplémentaires sur les rapports entre E et F, par exemple une équation avec HE et HF, et combiner cela avec la puissance du point H.

La ligne de puissance

1. Prendre le point d'intersection de deux lignes de puissance (s'il existe). La puissance de ce point par rapport aux trois cercles est la même, elle se trouve donc la troisième ligne de puissance.

2. Montrer que l'orthocentre H se trouve sur la ligne de puissance des deux cercles donnés. Il s'ensuivra une équation avec des distances orientées et ensuite à l'aide de la réciproque du théorème de la puissance le résultat cherché.

3. D et H se trouvent les deux sur la ligne de puissance des deux cercles circonscrits de $\triangle DEH$ et $\triangle ABH$. Il reste encore à montrer que la droite reliant le centre des cercles est parallèle à CM.

La droite de Simson

1. Exceptionnellement on va renoncer de traiter tous les cas séparément pour cet exercice, il suffira donc de le montrer pour un cas donné. Considérer les angles entre les droites de Simson comme angle extérieur d'un triangle qui est délimité par un des côtés du triangle ABC. On peut ainsi diviser l'angle en plusieurs parties. Avec un peu de chasse aux angles à travers les nombreux quadrilatères inscrits on obtient facilement le résultat cherché.

2. (OMI 2003/4) L'hypothèse sur les bissectrices n'intervient que sous la forme
$$\frac{AB}{CB} = \frac{DA}{DC}$$
il n'est même pas nécessaire de la faire apparaître sur le dessin. Faire de la chasse aux angles avec trois angles du quadrilatère inscrit et observer que P, Q, R sont alignés. Il y a deux paires de triangles semblables
$$\triangle DPR \sim \triangle DBC \qquad \triangle DQR \sim \triangle DBA.$$

Céva et Ménélaüs

1. $$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

2. Essayer de trouver $\frac{AP}{PC}$. Pour cela, appliquer Céva et Ménélaüs dans le triangle ACD.

3. Soit S le point d'intersection de MQ, NP et BD et soit X le point d'intersection de AC avec PQ. Le procédé est similaire à la preuve du théorème de Desargues. On veut montrer à l'aide de Ménélaüs que M, N et X sont alignés, càd que
$$\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CX}{XA} = -1.$$
Le premier terme se trouve chez Ménélaüs dans le triangle ABD, le deuxième dans $\triangle BCD$ et le troisième dans $\triangle ACD$. Multiplier et c'est fini. La réciproque s'ensuit par symétrie.

4. Appliquer Ménélaüs deux fois dans le triangle GHI et comparer les équations trouvées terme à terme.

Points spéciaux du triangle

Le centre de gravité

1. Soit S le centre de gravité et supposer $BM_b = CM_c$, où M_b et M_c sont les milieux des côtés CA resp. AB. Montrer d'abord que $\triangle BCS$ est isocèle et ensuite que les triangles BCM_b et CBM_c sont isométriques.

2. On arrive de C à S par une homothétie de centre M, où M est le milieu du segment AB, de rapport $\frac{1}{3}$. Comme M est fixe pendant l'opération, le lieu géométrique de S est également un cercle.

Le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits

1. Dessine le centre du cercle inscrit et les lignes qui le relient aux sommets. Cela sépare le triangle en trois plus petits triangles. Essaye de calculer l'aire de ces plus petits triangles.

2. Montrer que $AC'IB'$ est un quadrilatère inscrit.

3. (Slo 2005/I/3) Commence par la substitution standard $AB = x+y$, $BC = y+z$, $CA = z+x$. Cela simplifie un peu la condition supplémentaire qui reste toutefois un peu étrange. Il faut essayer de construire quelque chose où on peut l'appliquer directement. Essaie d'abord de le faire par toi-même, si tu n'as pas d'idées, voici une possibilité : soit P le point de tangence du cercle inscrit avec le côté AB et A' l'image de A par une symétrie de centre P. La condition supplémentaire signifie alors que $A'BI$ est isocèle ! Pour le rapport cherché on trouve alors 2.

4. (Bulgarie 1997) Commencer par dessiner les cercles de diamètre AB resp. CH. Soit S le point d'intersection de MK avec le cercle de diamètre AB. Le fait que AS est la bissectrice de $\angle CAH$ se démontre facilement à l'aide du point i. du script.

Le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre

1. AH_a est la bissectrice de $\angle H_bH_aH_c$. Considérer les quadrilatères inscrits BH_aHH_c et CH_aHH_b.

2. (BW 96/3) Construire des lieux géométriques qui fixent P et Q. On en déduit deux possibilités, soit $PQ = 2 \cdot \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$, soit $PQ = 2 \cdot \sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

3. Essaie d'interpréter les trois droites BB', CC' et HH' comme des lignes de puissances de certains cercles bien choisis.

Quadrilatères circonscrits

1. (Iran 2001) Les deux équations sont équivalentes grâce au fait qu'il existe un cercle tangent aux droites AB, AD, CD et BE. Plus exactement, le cercle exinscrit de $\triangle ACD$ opposé à A touche AC en P, AD en Q et CD en R. Supposons que ce cercle touche BE en un point S et appliquons les équations suivantes pour montrer les relations cherchées :

$$AP = AQ \qquad BP = BS \quad DQ = DR \qquad CP = CR \quad EQ = ES \qquad FR = FS$$

2. (OIM 1962/5) Il existe plusieurs possibilités pour construire D, mais je crois que tous utilisent un point de pivot (le centre du cercle inscrit ou quelque chose du même genre). Prenons par exemple la différence de deux côtés voisins. La différence des deux autres côtés est alors la même et on peut utiliser ce fait pour construire un cercle en A. Pour l'intersection de ce cercle avec AD on a

$$\angle APC = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Le point P peut également être construit à l'aide d'un cercle convenable sur le segment AC.

1 Exercices supplémentaires

1. On a

$$\frac{TP}{AP} = \frac{[BCT]}{[BCA]}.$$

2. Appliquer la puissance du point d'intersection de MN et PQ. Utiliser ceci pour montrer que la hauteur de $\triangle MNP$ passant par P est de la même longueur que la hauteur de $\triangle MNQ$ passant par Q.

3. Posons par exemple $\angle CAB \doteq \alpha$, $\angle BAD \doteq \beta$ et $\angle ADB \doteq \epsilon$. Si on arrive à montrer que $\angle KBA = \epsilon$, on a fini. Pour cela, considérer les quadrilatères inscrits $ADMC$ et $AKBS$, où S est le point d'intersection de CD avec AM.

4. Cet exercice fonctionne exactement comme la preuve du théorème de la puissance. Trouver deux couples de triangles semblables qui contiennent les segments donnés et les combiner pour obtenir les rapports désirés.

5. (CH 98/5) Soit S le point d'intersection des deux tangentes. Appliquer Ménélaüs dans le triangle SPQ.

6. Par hypothèse on a $\angle ALP = \angle APL$ et

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AK}{AP}.$$

Il s'ensuit que $\angle APK = \angle ABP$ et puis que $\angle KPL = \angle LPB$.

7. Considérer les cercles de centres D, E resp. F et de rayons DC, EA resp. FB. Les trois perpendiculaires données sont en fait les lignes de puissance de ces cercles et on sait que celles-ci se coupent toujours en un point.

8. (USAMO 1994/3) Commencer par la chasse aux angles, par exemple avec $\angle ACB \doteq \alpha$, $\angle BAC \doteq \beta$ et $\angle DCE \doteq \gamma$. On trouve alors deux couples de triangles semblables (soit S le point d'intersection de AD, BE et CF)

$$\triangle ACP \sim \triangle BEF \qquad \triangle ACE \sim \triangle FES.$$

Ce qui reste encore à montrer est une conséquence du fait que AD et BC sont parallèles. ($ABCD$, $CDEF$ et $EFAB$ sont tous des trapèzes isocèles.)