MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Geometrie II

Arnaud Maret, Daniel Sprecher, Horace Chaix, Marco Cavaleri, Patrick Stalder

Aktualisiert: 4. Februar 2022
vers. 3.0.2

Inhaltsverzeichnis

1 Ähnlichkeit und Potenzen (P. Stalder, D. Sprecher)

1.1 Ähnliche Dreiecke

Die beiden Strahlensätze sind wohl allen aus der Schule bekannt. Wir werden sie darum hier nur kurz ohne Beweis und Beispiele wiederholen. Ihr könnt die Strahlensätze mit den ersten beiden Aufgaben zu diesem Kapitel sonst nochmals üben.

Satz 1.1 (Erster Strahlensatz) *Gegeben seien zwei parallele Geraden a und b und ein Punkt S, der auf keiner dieser Geraden liegt. Ein beliebiger Strahl von S schneide a in A und b in B. Ein zweiter Strahl schneide a in A' und b in B'. Nun gilt*

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SA}{AB} = \frac{SA'}{A'B'}.$$

Satz 1.2 (Zweiter Strahlensatz) *Bei der gleichen Anordnung wie oben gilt ebenfalls*

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{SA}{SB}.$$

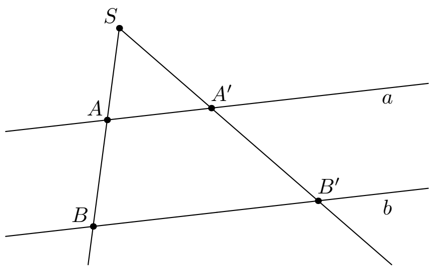


Abbildung 1: Strahlensätze

Wichtig ist, dass beim ersten Strahlensatz auch die Umkehrung gilt. Um sie richtig zu formulieren müssen wir jedoch **gerichtete Strecken** benutzen. Dabei können Verhältnisse auch negativ werden. Seien X, Y und Z drei verschiedene Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Dann ist das Verhältnis $\frac{XY}{YZ}$ positiv, weil die Vektoren $\overrightarrow{XY}$ und $\overrightarrow{YZ}$ in die gleiche Richtung zeigen. Jedoch ist $\frac{XZ}{ZY}$ negativ, da hier die entsprechenden Vektoren in entgegengesetzte Richtung weisen. Immer wenn gerichtete Verhältnisse oder Produkte auftreten werden wir das in Klammer vermerken.

Satz 1.3 (Umkehrung des ersten Strahlensatzes) *Liegen S, A, B und S, A', B' je auf einer Geraden und gilt*

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} \qquad \textit{(gerichtete Strecken)}$$

so sind die Geraden AA' und BB' parallel.

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes gilt nicht. Man kann sich dies überlegen, indem man den Kreis um A mit Radius AA' konstruiert. Im Allgemeinen wird dieser Kreis SB' ein zweites Mal in einem Punkt $P \neq A'$ schneiden. In dieser Anordnung gilt

$$\frac{AP}{BB'} = \frac{SA}{SB}$$

die Geraden AP und BB' sind aber nicht parallel.

Jetzt ist es möglich sich mit **ähnlichen Dreiecken** zu beschäftigen. Zuerst folgt eine einfache aber wichtige Definition.

Definition 1.1 (Ähnliche Dreiecke) Zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Wir schreiben es $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

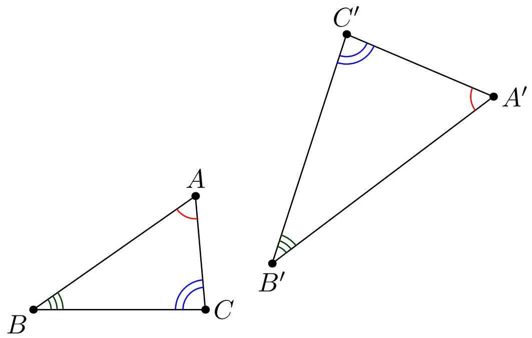


Abbildung 2: Ähnliche Dreiecke

Da die Winkelsumme in einem Dreieck immer 180° ist, folgt daraus auch, dass auch der dritte Winkel gleich ist. Es gibt manche Möglichkeiten, um ähnliche Dreicke zu finden:

Satz 1.4 (Ähnliche Dreiecke) *Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn :*

1. *Sie die gleichen Winkel haben. (WWW)*
2. *Ihre Seitenverhältnisse gleich sind. (SSS)*
3. *Ein Winkel und die Seitenverhältnisse der an diesen Winkel angrenzenden Seiten gleich sind. (SWS)*

Dies ist die ganze Theorie. Nun folgen einige Beispiele, die zeigen wie hilfreich ähnliche Dreiecke sein können.

Beispiel 1 *Im Quadrat $ABCD$ sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Die Rechtwinklige zu MC durch M schneide AD in K. Zeige, dass die beiden Dreiecke CMB und CKM ähnlich sind.*

Lösung. Dass zwei Dreiecke ähnlich sind, kann man entweder direkt über Winkeljagd zeigen (indem man zeigt, dass alle drei Winkel gleich gross sind) oder man benutzt die

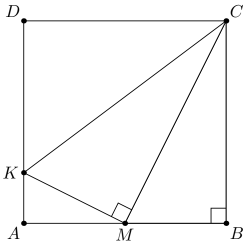


Abbildung 3: Beispiel 1

Umkehrung des Ähnlichkeitssatzes. Letzteres machen wir hier.
Nach Vorraussetzung gilt $\angle MBC = \angle KMC = 90°$. Wir müssen nun noch zeigen

$$\frac{MK}{MC} = \frac{BM}{BC}.$$

Kurze Winkeljagd zeigt, dass die beiden Dreiecke MBC und KAM ähnlich sind. Daraus folgt

$$\frac{MK}{MC} = \frac{MA}{BC} = \frac{BM}{BC}.$$

Dabei benutzten wir beim letzten Schritt, dass M der Mittelpunkt von AB ist. □

Beispiel 2 (Finalrunde 2016) *Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei G der Schnittpunkt der Parallelen von AB durch H und der Parallelen von AH durch B. Sei I der Punkt auf der Geraden GH, sodass AC die Strecke HI halbiert. Sei J der zweite Schnittpunkt von AC und dem Umkreis des Dreiecks CGI. Zeige, dass $IJ = AH$ gilt.*

Lösung. Das Problem dieser Aufgabe ist, dass die Geraden AH und IJ in keinem Verhältnis zueinander stehen. Man kann sie nicht miteinander in Verbindung bringen. Das Ziel bei solchen Aufgaben ist immer, die Aussage auf Winkel zu reduzieren. Wie löst man also eine solche Aufgabe? Als erstes findet man das Parallelogramm $ABGH$, wodurch es auch genügt zu beweisen, dass $BG = JI$. Allerdings ist das nicht wirklich hilfreich. Wie immer, wenn man nicht weiss, was man bei Geometrieaufgaben machen sollte, kann man Winkeljagd versuchen.

Wenn man nun die Höhenfusspunkte von A und B mit A_1 und B_1 bezeichnet, findet man das Sehnenviereck BA_1B_1A. Zudem ist BG parallel zu AH und somit gilt $\angle GBC = 90°$. Da GH parallel zu BA ist, gilt auch $\angle CHG = 90°$. Somit gilt $\angle GBC = \angle GHC$. Also ist $GBHC$ ein Sehnenviereck.

Jetzt kommt der schwierigste Teil der Aufgabe. Es ist gegeben, dass AC die Strecke HI halbiert. Sei P der Schnittpunkt von AC und HI. Wir müssen irgendwie die Tatsache verwenden, dass $IP = PH$ gilt. Sei A' der Schnittpunkt der Geraden AC und der Parallelen zu IJ durch H. Da $\angle IJA' = \angle JA'H$ und $\angle HPA' = \angle IPJ$ sind die Dreiecke PIJ und PHA' ähnlich zueinander. Da aber $HP = PI$ gilt, sind sie sogar kongruent. Daraus folgt, dass $A'H = IJ$. Somit genügt es zu beweisen, dass AHA' ein gleichschenkliges

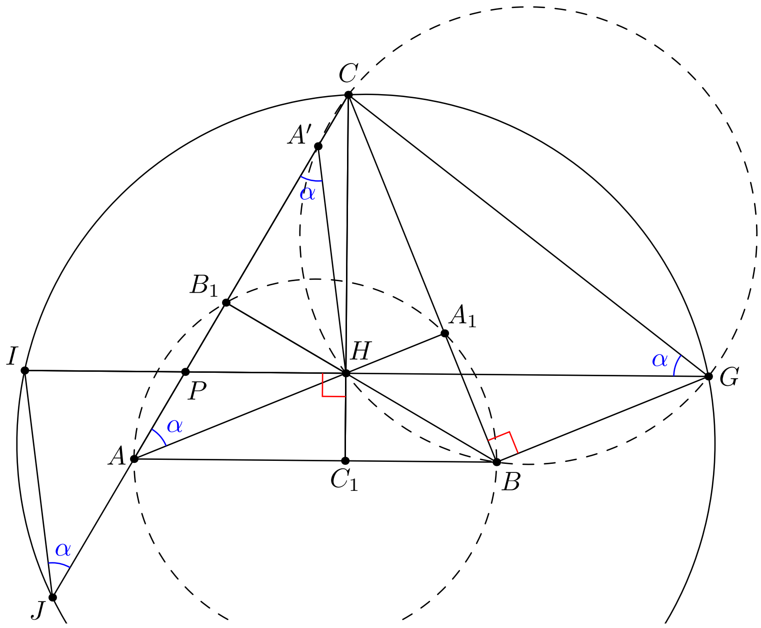


Abbildung 4: SMO 2016/8

Dreieck ist. Mit dem gefunden ähnlichen Dreieck sowie den Sehnenvierecken AA_1B_1B, $CHBG$ und $CGIJ$ folgt nun :

$$\angle AA'H = 180^\circ - \angle HA'C = \angle CBH = \angle A_1BB_1 = \angle A_1AB_1 = HAA'.$$

Daraus folgt, dass HAA' ein gleichschenkliges Dreieck ist. Somit gilt $IJ = AH$.

□

Beispiel 3 (IMO-Selektion 2016) *Sei ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt von BC. Sei D ein Punkt auf AB, sodass $CA = CD$ gilt und E ein Punkt auf BC, sodass $EB = ED$ gilt. Die Parallele zu ED durch A schneide die Gerade MD im Punkt I und die Geraden AM und ED schneiden sich im Punkt J. Zeige, dass die Punkte C, I und J auf einer Geraden liegen.*

Lösung. Bei dieser Aufgabe kommen überhaupt keine Kreise vor. Aus diesem Grund kann man sie auch nicht mit Winkeljagd in Sehnenvierecken lösen. Allerdings gibt es eine Lösung durch rechnen. Die eleganteste Lösung findet man jedoch durch kongruente Dreiecke. Da M ein Mittelpunkt ist, definieren wir einen Punkt Y als Schnittpunkt von EC mit AI. Da AI parallel zu DJ ist, gilt $\angle DEC = \angle DEY = \angle CYA$.Ausserdem gilt $DC = CA$ und somit $\angle CAD = \angle CDA$. Zudem gilt $\angle YAB = \angle BDE = \angle EBD = \angle YBA$. Daraus folgt

$$\angle YAC = \angle YAB - \angle CAB = \angle EBD - \angle CDA = 180^\circ - (180^\circ - \angle EBD) - \angle BDC$$

$$= \angle DBC = \angle DCE$$

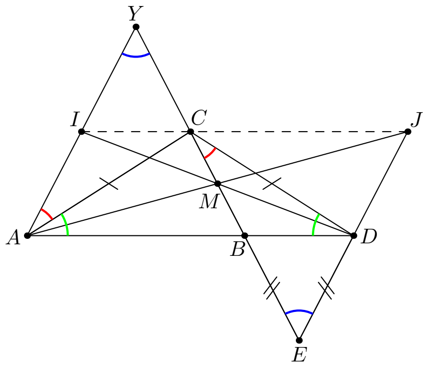


Abbildung 5: IMO-Selektion 2016/10

Aus $\angle AYC = \angle DEC$ und $\angle YAC = \angle DCE$ folgern wir, dass die Dreiecke CYA und DEC ähnlich sind. Da aber $CD = CA$ gilt, sind diese beiden Dreiecke sogar kongruent. Das heisst, $YC = ED = EB$. Somit ist M sogar der Mittelpunkt der Strecke YE. Da ED parallel zu YI ist, gilt $\angle YAM = \angle MJE$. Somit sind die Dreiecke YAM und EMJ ähnlich und wegen $EM = YM$ sind sie sogar kongruent. Daraus folgt auch, dass $JM = AM$. Nun verlängert man die Strecken YM und EM um die Länge MC, bzw MB und erhält, dass die Dreiecke YAB und EJC ebenfalls kongruent sind. Daraus folgt, dass JC parallel zu AD ist. Da $\angle IMA = \angle JMD$ sind die Dreiecke JMD und IMA ähnlich. Wegen $JM = MA$ sind sie auch kongruent. Daraus folgt, dass $IM = MD$. Da aber AI parallel zu JD ist, und M der Mittelpunkt von AJ ist, ist M genau dann der Mittelpunkt von DI, wenn $ADJI$ ein Parallelogramm ist. Da C auf der Parallelen von AD durch J liegt, ist C auf der gerade JI, was den Beweis vervollständigt. □

Beispiel 4 (IMO 2017) *Es seien R und S verschiedene Punkte auf einem Kreis k, so dass RS kein Durchmesser ist. Es sei l die Tangente an k in R. Der Punkt T liegt so, dass S der Mittelpunkt der Strecke RT ist. Ein Punkt J ist auf dem kleineren Bogen RS von k so gegeben, dass der Umkreis ω des Dreiecks JST die Gerade l in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Es sei A derjenige gemeinsame Punkt von ω und k , der näher an R liegt. Die Gerade AJ schneidet k in einem weiteren Punkt K. Man beweise, dass die Gerade KT den Kreis ω berührt.*

Lösung. Bei dieser Aufgabe sind schon zwei Sehnenvierecke gegeben. Diese sind $AJST$ und $RJSK$. Mit Working Backward stellt man fest, es genügt zu beweisen, dass $\angle KTR = \angle SAT$. Da die Sehnenvierecke schon gegeben sind, ist Winkeljagd eine gute Idee. Man findet :

$$\angle RKS = \angle ARS = \angle ART$$
$$\angle RSK = \angle RJK = 180° - \angle AJS = \angle ATS = \angle ATR$$

Somit sind die Dreiecke RKS und ART ähnlich. Es gilt somit $\angle KRS = \angle STA$. Wir

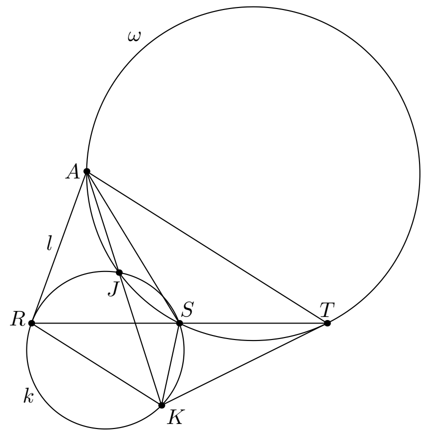


Abbildung 6: IMO 2017/4

müssen nun irgendwie die Tatsache verwenden, dass $RS = ST$. Am einfachsten ist dies, wenn wir die ähnlichen Dreiecke RKS und ART verwenden. Es gilt

$$\frac{RK}{RS} = \frac{TR}{TA}$$

Da $RS = ST$, gilt $\frac{RK}{ST} = \frac{TR}{TA}$. Umformen ergibt $\frac{RK}{TR} = \frac{ST}{TA}$. Da auch $\angle KRT = \angle STA$ folgt aus dem dritten Ähnlichkeitssatz, dass die Dreiecke KTR und STA ähnlich sind. Daraus folgt, dass $\angle KTR = \angle SAT$, woraus folgt, dass KT tangential an ω ist.

Entscheidend bei dieser Aufgabe ist also, dass man die Ähnlichkeit verwendet, um mit den Streckenlängen zu rechnen.

□

1.2 Die Potenz eines Punktes

Schon Euklid hat in seinem Werk *Die Elemente* diesen wichtigen Satz erwähnt und bewiesen.

Satz 1.5 (Potenzsatz) *Gegeben ein fester Punkt P und ein Kreis k. Betrachte die beiden Schnittpunke A und B von k mit einer beliebigen Gerade g durch P. Das Produkt $PA \cdot PB$ wird die Potenz von P bezüglich k genannt und ist unabhängig von der Wahl von g.*

Beweis. Betrachte Abb. 1, AB und $A'B'$ seien zwei beliebige Geraden durch den Punkt P, der sich ausserhalb des Kreises befindet. Die Dreiecke $\triangle PAA'$ und $\triangle PB'B$ sind ähnlich, weil $\angle B'BA = 180° - \angle B'A'A = \angle PA'A$. Daraus folgt

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$$

und damit das Gewünschte. Der Fall, wenn P im Innern des Kreises liegt, funktioniert analog. Punkte auf der Kreislinie haben die Potenz 0. □

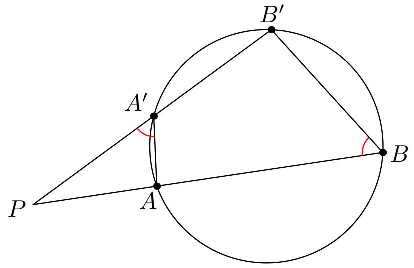


Abbildung 7: $\triangle PAA' \sim \triangle PB'B$

Sehr oft verwendet man den Potenzsatz mit der Tangente durch P an den Kreis. Sei T der Tangentenberührungspunkt, es gilt dann selbstverständlich $PA \cdot PB = PT^2$.

Beispiel 5 *Seien PA und PB die beiden Tangenten von einem beliebigen Punkt P ausserhalb des Kreises k, wobei A und B Berührungspunkte sind. C sei der Schnittpunkt der Parallelen von PB durch A mit k. Der zweite Schnittpunkt von PC mit k wird E genannt. Zeige, dass AE die Strecke PB halbiert.*

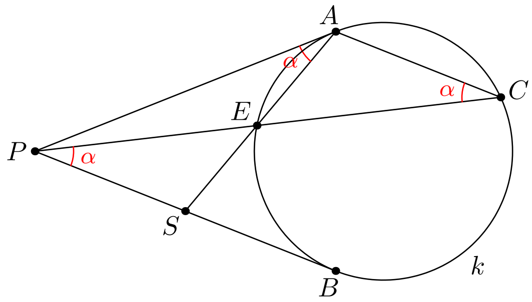


Abbildung 8: Beispiel 5

Lösung. Wir zeigen $SB^2 = SP^2$. Dazu betrachten wir die Potenz von S an k. Es gilt nach Potenzsatz

$$SB^2 = SE \cdot SA.$$

Wir haben das Beispiel bewiesen, wenn wir noch zeigen

$$SP^2 = SE \cdot SA \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SP}{SE} = \frac{SA}{SP}.$$

Dies ist der Fall, wenn $\triangle PSE \sim \triangle ASP$, also wenn $\angle SPE = \angle PAS$. Um dies zu zeigen, definieren wir $\alpha \doteq \angle SPE$. Weil PB und AC parallel sind, ist $\angle ACP = \alpha$ und nach Tangentenwinkelsatz auch $\angle PAS = \alpha$. □

Ähnlich wie beim ersten Strahlensatz existiert auch für den Potenzsatz eine nützliche Umkehrung. Beachte, dass auch hier wieder gerichtete Strecken im Spiel sind (siehe Kapitel 1). Dies hat zur Folge, dass die Potenz eines Punktes im Innern des Kreises negativ ist.

Satz 1.6 (Umkehrung des Potenzsatzes) *Die Geraden AB und $A'B'$ schneiden sich in P und es gilt $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ (als gerichtete Strecken), dann liegen die Punkte A, B, A', B' auf einem Kreis.*

1.3 Die Potenzlinie

Gegeben seien zwei Kreise k_1, k_2 mit Mittelpunkten M_1, M_2 und Radien r_1, r_2. Ein Punkt hat im Allgemeinen zwei verschiedene Potenzen zu den beiden Kreisen. Für welche Punkte ist die Potenz zu beiden Kreisen gleich gross? Die Antwort ist die Potenzlinie, welche senkrecht auf M_1M_2 steht und bei sich schneidenden Kreisen durch die Schnittpunkte geht.

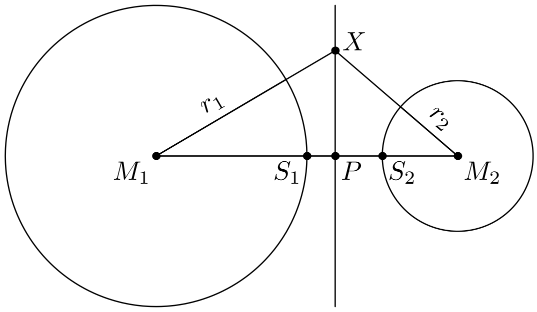


Abbildung 9: Die Potenzlinie

Beweis. Seien S_1 und S_2 die Schnittpunkte von k_1, respektive k_2 mit der Strecke M_1M_2 (Abb. 3). Auf der Strecke S_1S_2 muss es aus Gründen der Stetigkeit der Potenz einen Punkt P geben, der zu den beiden Kreisen die gleiche Potenz hat. Wir zeigen nun, dass auch alle Punkte X, die auf der Senkrechten von M_1M_2 durch P liegen die gleiche Potenz zu den beiden Kreisen haben. Die Potenz von P zu den beiden Kreisen ist

$$\begin{gathered}(PM_1 - r_1)(PM_1 + r_1) = (PM_2 - r_2)(PM_2 + r_2)\\ \Leftrightarrow PM_1^2 - r_1^2 = PM_2^2 - r_2^2\\ \Leftrightarrow PM_1^2 - r_1^2 + PX^2 = PM_2^2 - r_2^2 + PX^2\\ \Leftrightarrow XM_1^2 - r_1^2 = XM_2^2 - r_2^2\\ \Leftrightarrow (XM_1 - r_1)(XM_1 + r_1) = (XM_2 - r_2)(XM_2 + r_2)\end{gathered}$$

Dabei haben wir zu der zweiten Zeile auf beiden Seiten PX^2 addiert und in der dritten Zeile den Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle PXM_1$, bzw. $\triangle PXM_2$ angewendet. Auf der letzten Zeile steht die Potenz der Punkte X zu den beiden Kreisen. Unsere Intuition sagt uns, dass es wohl keine weiteren Punkte geben kann, die diese Eigenschaft erfüllen. Dies ist auch so und wir wollen das ohne Beweis akzeptieren. □

Schneiden sich die Kreise nicht, konstruiert man die Potenzlinie, indem man eine der vier gemeinsamen Tangenten konstruiert. Die Potenzlinie geht dann durch den Mittelpunkt der Berührungspunkte.

Beispiel 6 (Finalrunde 2009, 7) *Die Punkte A, M_1, M_2 und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Sei k_1 der Kreis mit Mittelpunkt M_1 durch A und k_2 der Kreis mit Mittelpunkt M_2 durch C. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten E und F. Eine gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 berühre k_1 in B und k_2 in D. Zeige, dass sich die Geraden AB, CD und EF in einem Punkt schneiden (Abb. 10).*

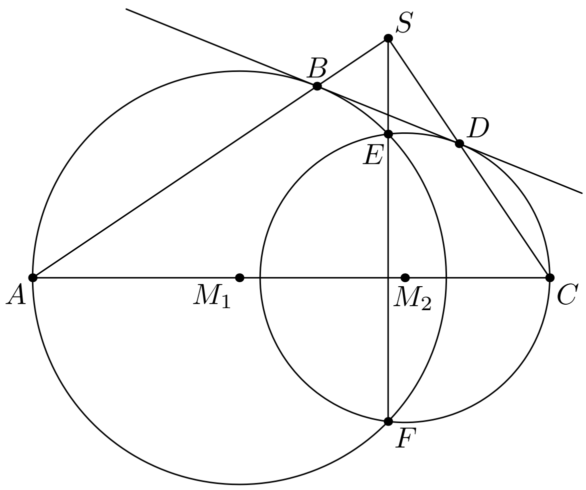


Abbildung 10: SMO 2009/7

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass EF gerade die Potenzlinie der beiden Kreise ist. Es genügt also zu zeigen, dass der Schnittpunkt S der Geraden AB und CD die gleiche Potenz an beide Kreise hat, also dass $SA \cdot SB = SC \cdot SD$ gilt. Dies ist nach dem Potenzsatz aber äquivalent dazu, dass $ACDB$ ein Sehnenviereck ist. Dies wollen wir nun mit Winkeljagd beweisen.
Wegen dem Zentriwinkelsatz gilt $\angle CM_1B = 2\angle CAB$. Da die Radien M_1B und M_2D beide senkrecht auf der Tangenten BD stehen, sind sie parallel und es gilt $\angle CM_2D = \angle CM_1B = 2\angle CAB$. Das Dreieck $\triangle M_2CD$ ist gleichschenklig, also folgt nun:

$$\angle BDC = 90° + \angle M_2DC = 90° + \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle CM_2D) = 180° - \angle CAB.$$

Damit sind wir fertig. □

Potenzlinien können sehr Hilfreich sein, wenn man versucht Aufgaben zu lösen. Wir geben hier einen kleinen Tipp für die Übungsaufgaben: Auch ein Punkt kann als Kreis mit Radius 0 betrachtet werden. Somit hat man für 2 Punkte A und P immer die Potenz PA^2.

2 Klasische Konfigurationen, (M. Cavaleri)

2.1 Einführung

Dieses Skript ist dazu bestimmt einige klassische Konfigurationen zu zeigen, durch welche ihr in schwierigeren Aufgaben Zeit gewinnen könnt, sobad ihr die Aufgaben einmal gesehen habt. Bevor wir diese Konfigurationen anschauen, behandeln wir noch einmal einige wichtige Punkte des Dreieckes. In diesem Skript arbeiten wir mit einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$. Wir nehmen an, dass ihr die Konstruktion der wichtigsten Punkte des Dreieckes kennt (Umkreismittelpunkt M, Inkreismittelpunkt I, Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S). Wenn nichts anderes definiert wird, gilt $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle BCA$. Dieses Skript beginnt mit einem anderen wichtigen Punkt des Dreieckes: Der Ankreismittelpunkt.

Satz 2.1 *Die innere Winkelhalbierende von A sowie die äusseren Winkelhalbierenden der Winkel in B und C schneiden sich in I_A, dem **Ankreismittelpunkt der Seite** a. Die Ankreismittelpunkte I_B und I_C sind analog definiert.*

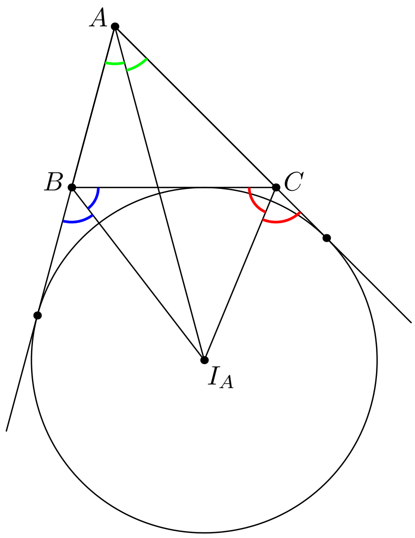


Abbildung 11: Der Ankreis

Beweis. Sei I_A der Schnittpunkt der beiden äusseren Winkelhalbierenden der Punkte B und C. Da I_A auf der äusseren Winkelhalbierenden von B ist, hat I_A den gleichen Abstand zur Gerade AB wie zur Gerade BC. Ebenso, da I_A auf der äusseren Winkelhalbierenden des Punktes C ist, hat I_A den gleichen Abstand zu den Geraden AC wie zur gerade BC. Somit hat I_A den gleichen Abstand zur Gerade AB wie zur Geraden AC. Da die drei äusseren Winkelhalbierenden sich nicht auf einem Punkt schneiden können, muss I_A auf der inneren Winkelhalbierenden von A befinden. Indem man als Radius die Distanz zu den Geraden verwendet, findet man den Ankreis mit Zentrum I_A. □

2.2 Klassische Konstruktionen des Dreieckes

In disesm Kapitel behandeln wir die wichtigsten klassischen Konfigurationen des Dreieckes. WUM, die Spiegelung des Höhenschnittpunktes, der Eulerkreis sowie die Eulergerade und die Eigenschaften der In- und Ankreise.

2.2.1 Inkreis/Ankreis Lemma

Satz 2.2 (Inkreis/Ankreis Lemma) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und I das Zentrum seines Inkreises. Sei S der zweite Schnittpunkt von AI mit dem Umkreis von ABC. Also sind die Punkte I, B, C et I_A auf einem Kreis mit Durchmesser II_A und dem Zentrum S, wobei I_A das Zentrum der Ankresises ist.*

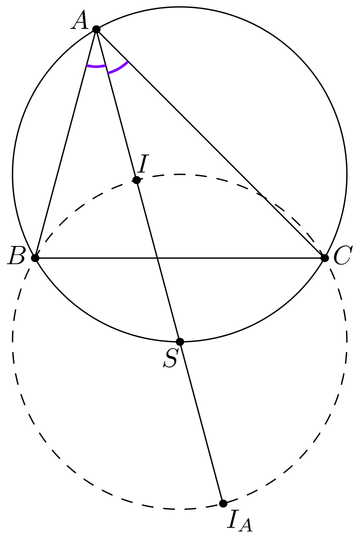


Abbildung 12: Inkreis/Ankreis Lemma

Beweis. Montrons d'abord que $SB = SI$. Une chasse aux angles classique nous donne tout d'abord que $\angle SIB = \angle BAI + \angle IBA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. De plus, $\angle ISB = \angle ACB = 180°-\alpha-\beta$. Ainsi, $\angle SBI = 180°-\angle SIB-\angle IBS = 180°-(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})-(180°-\alpha-\beta) = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, ce qui montre bien que $SB = SI$. Le même raisonnement peut être fait avec SC et donne $SC = SI$, on obtient donc que $SB = SC = SI$. On a déjà que B, C et I sont sur un cercle de centre S. De plus, comme $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90°$, I_A est aussi sur le cercle et il forme un diamètre avec I, ce qui termine la preuve. $\square$

2.2.2 Inkreis und Ankreis

Nous allons maintenant travailler avec une transformation du plan que certains d'entre vous ont déjà vue à l'école : l'homothétie. Une homothétie est définie par la donnée d'un point O et d'un réel λ. L'homothétie de centre O et de rapport λ enverra alors un point P sur un point P' tel que $OP' = \lambda \cdot OP$ (distances orientées). On a donc que P et P' sont du même côté de O si $\lambda > 0$ et que P et P' ne sont pas du même côté de O si $\lambda < 0$.

Nous utiliserons parfois la notation $\mathcal{H}(P, \lambda)$ pour l'homothétie de centre P et de rapport λ.

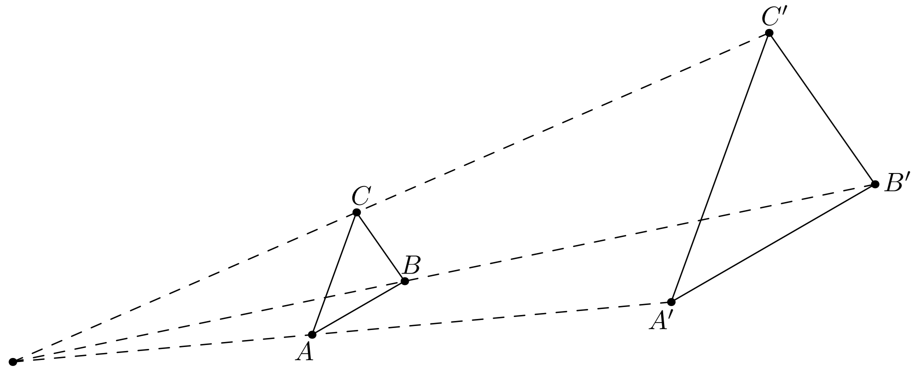


Abbildung 13: Un exemple d'homothétie

Wir untersuchen nun Konstruktionen welche die Dualität zwischen dem Inkreis und dem Ankreis zeigen.

Satz 2.3 (Durchmesser des Inkreises und des Ankreises) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, I das Zenrum seines Inkreises ω, D der Berührungspunkt von ω mit BC, I_A das Zentrum seines Ankreises ω_A an die Sete BC und X der Berührungspunkt von ω_A mit BC. Zudem definieren wir die Punkte E und Y sodass DE und XY die jeweiligen Durchmesser von ω beziehungsweise ω_A sidn. Also, (cf. Fig. 14)*

- *A, E und X sind auf einer Geraden.*
- *A, D und Y sind auf einer Geraden.*

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass es eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A gibt, welche ω auf ω_A sendet. Sei $\mathcal{H}$ die Zentrische Streckung mit Zentrum A sodass $\mathcal{H}(I) = I_A$. Definieren wir noch $F = \omega \cap AB$ und $F_A = \omega_A \cap AB$. Da $\triangle AFI \sim \triangle AF_AI_A$, hat man, dass $\mathcal{H}(F) = F_A$. Dies beweist, dass $\mathcal{H}(\omega) = \omega_A$. Zudem, da $ID \parallel I_AX$, hat man $\mathcal{H}(ID) = \mathcal{H}(I_AX)$ und also

$$\mathcal{H}(\{E, D\}) = \mathcal{H}(\omega \cap ID) = \omega_A \cap I_AX = \{X, Y\}$$

Da $\mathcal{H}(D) \neq X$ (weil $A \notin DX$), hat man $\mathcal{H}(E) = X$ und $\mathcal{H}(D) = Y$, was den Beweis verfollständigt. $\square$

Satz 2.4 (Mittelpunkte der Höhen) *In der gleichen Konfiguration wie vorher fügt man noch den Höhenfusspunkt H_A und den Mittelpunkt M von der Strecke AH_A. Also, (cf. Fig. 15)*

- *M, I und X sind auf einer Geraden.*
- *M, D et I_A sind auf einer Geraden.*

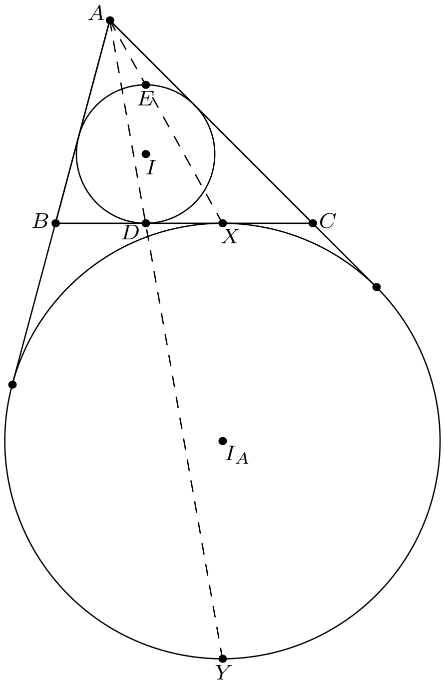


Abbildung 14: Satz 2.3

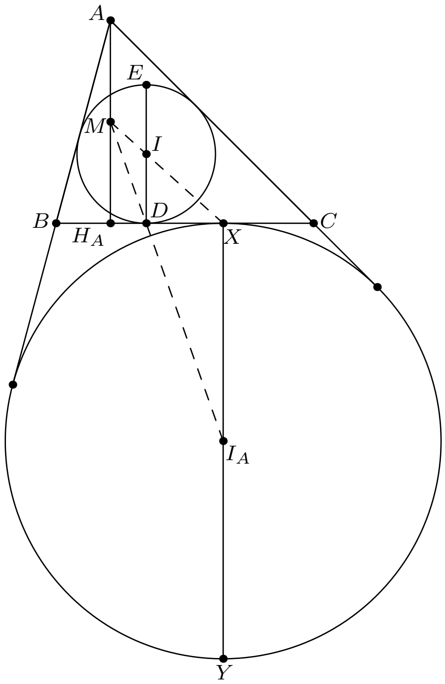


Abbildung 15: Satz 2.4

Beweis. Der Beweis wird euch als Übung überlassen. □

2.2.3 Spiegelungen des Höhenschnittpunktes

Satz 2.5 (Spiegelungen des Höhenschnittpunktes) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und H seind Höhenschnittpunkt. Seien X die Spiegelung von H an der Gerade BC und Y die Spiegelung von H am Mittelpunkt der Seite BC. Also $X, Y \in (ABC)$ und AY ist ein Durchmesser des Umkreises.*

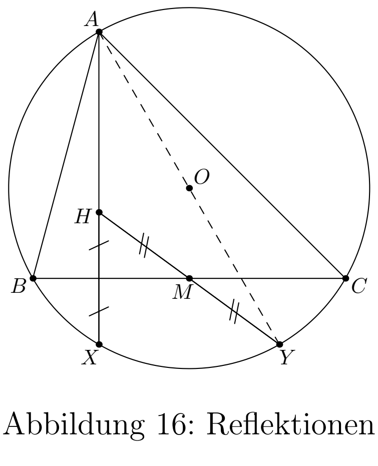


Abbildung 16: Reflektionen

Beweis. Den Beweis überlassen wir euch als Übung, ihr habt ihn ja schon einmal gesehen. □

2.2.4 Neun-Punkte-Kreis und Eulergerade

Satz 2.6 (Eulerkreis, Neun-Punkte-Kreis) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Also gibt es einen Kreis (welcher Eulerkreis oder Neun-Punkte Kreis gennant wird) der durch die Seitenmittelpunkte, die Höhenfusspunkte und die Mittelpunkte der Strecken geht, welche den Höhenschnittpunkt mit den Eckpunkten verbindet. Ausserdem ist sein Radius halb so gross wie derjenige des Umkreises.*

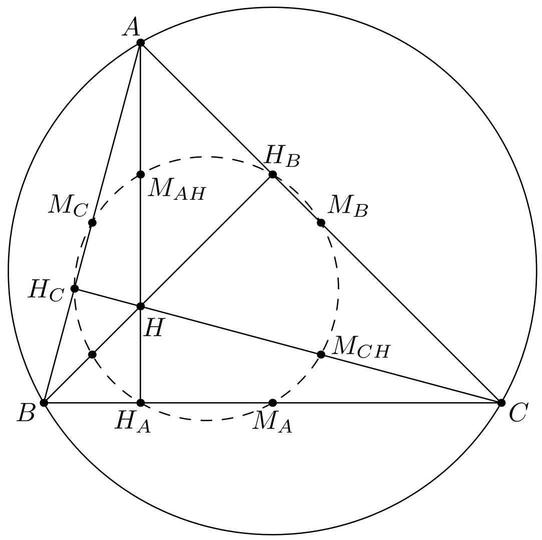


Abbildung 17: Der Eulerkreis

Beweis. Der wichtige Schritt dieses Beweises ist, eine Zentrische Streckung $\mathcal{H}(H, \frac{1}{2})$ von dem Umkreis (ABC) zu machen. Sei der neue Kreis Γ. Offensichtlich gilt $M_{AH}, M_{BH}, M_{CH} \in \Gamma$. Die sechs Spiegelungen des Höhenschnittpunktes auf (ABC) garantieren dass die Höhenfusspunkte und die Seitenmittelpunkte auch auf Γ sind. $\square$

Satz 2.7 (Die Eulergerade) *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, M der Umkreismittelpunkt triangle, H der Höhenschnittpunkt und S der Schwerpunkt. Also sind M, H und S auf einer Geraden, der Eulergeraden.*

Beweis. Den Beweis überlassen wir euch als Übung. (Ausserdem könnt ihr euch noch an der Frage den Kopf zerbrechen, warum auf der Grafik $M = O$ und $S = G$) $\square$

3 Working Backward und Transformationen der Ebene

(H. Chaix)

3.1 Working Backward

Working Backward ist eine wichtige Beweisstrategie, die man oft anwenden kann, wenn man mit Winkeljagd nicht mehr weiterkommt. Weil einige Beweise in diesem Skript

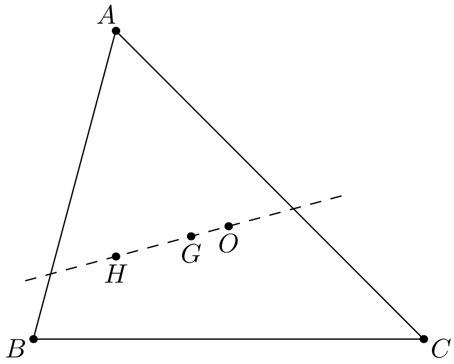


Abbildung 18: Die Eulergerade

diese Methode nutzen (z.B. auch schon der des Satzes über Sehnenvierecke, Satz 4.2 in Geometrie I), führen wir es bereits an dieser Stelle ein und lösen zwei typische Beispiele dazu vor. Die Vorgehensweise bei Working Backward ist folgende.

Angenommen ein Punkt P erfüllt eine bestimmte Anzahl Bedingungen H und man muss beweisen dass dieser Punkt die Bedingungen C erfüllt. Die Vorgehensweise ist dann folgende:

1. man zeigt, dass es einen Punkt P' gibt, welcher gleichzeitig die Bedingungen H und C erfüllt.
2. man zeigt, dass es nur einen Punkt gibt, welcher die Bedingungen H erfüllt.

Mit diesen beiden Schritten beweist man, dass $P = P'$. Da P' die Bedingungen C erfüllt, gilt dies ebenfalls für den Punkt P und der Beweis ist vollständig. **Ein Beweis mit Working Backward muss immer beide Schritte enthalten um vollständig zu sein.** Nun folgt ein Beispiel um diese beiden Schritte zu verdeutlichen :

Beispiel 7 *Seien ABC und $AB'C'$ zwei ähnliche Dreiecke mit demselben Umlaufsinn und einer gemeinsamen Ecke A. Zeige, dass dann A, B, C und der Schnittpunkt der beiden Geraden BB' und CC' auf einem Kreis liegen.*

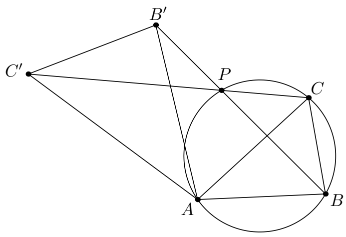


Abbildung 19: Beispiel 7

Lösung. Wir benennen den Schnittpunkt von BB' und CC' mit P und die Winkel der Dreiecke wie immer mit α, β und γ. Das Ziel ist es zu zeigen, dass P auf dem Umkreis von

ABC liegt. Direkt mit Winkeljagd kommt man nicht so weit, jedoch liegt eine Symmetrie zwischen den Punkten B, C und B', C' vor und P muss, wenn er auf dem Umkreis von ABC liegt, auch auf dem Umkreis von $AB'C'$ liegen. Dies motiviert sich einen Punkt P' als Schnittpunkt der beiden Umkreise zu konstruieren. Wir sind fertig, wenn wir jetzt noch zeigen können, dass B, P', B' und C, P', C' je auf einer Geraden liegen. Dann ist nämlich P' auch der Schnittpunkt von BB' und CC' und es kann ja nur einen solchen geben, was bedeutet $P = P'$.
Dass B, P' und B' auf einer Geraden liegen, zeigen wir mit Winkeljagd:

$$\begin{aligned}\angle BP'B' &= \angle BP'A + \angle AP'C' + \angle C'P'B' \\ &= \angle BCA + \angle AB'C' + \angle C'AB' \\ &= \gamma + \beta + \alpha \\ &= 180°.\end{aligned}$$

Weil auch Symmetrie zwischen den Punkten B, B' und C, C' vorliegt, liegen auch C, P', C' auf einer Geraden. □

Abschliessend zu diesem Kapitel noch zwei Bemerkungen. Was wir an diesen Beispielen beobachten können, gilt sehr allgemein. Wenn wir mit Winkeln zu tun haben, sind Punkte auf Kreisen sehr viel praktischer als Punkte, die mit Geraden definiert sind. Mit Working Backward kann man Punkte so definieren, dass man die ganze Winkelmaschinerie in den Kreisen benutzen kann.
Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Symmetriebegründungen, die wir in der zweiten Aufgabe verwendet haben. Wenn ihr bei euren Lösungen schreibt '...aus Symmetriegründen folgt...', sagt bitte unbedingt auch, zwischen was denn Symmetrie vorliegt, das geht oft vergessen. 'Es liegt Symmetrie zwischen den Punkten B, B' und C, C' vor' heisst übrigens, dass wenn wir B mit C und B' mit C' vertauschen, immer noch eine Anordung vorliegt, die den Voraussetzungen der Aufgabe entspricht.

3.2 Achsensymmetrie

Das Ziel der nächsten Kapitel ist es, die hilfreichsten Transformationen der euklidischen Ebene zu präsentieren . Wir vermuten, dass der Leser schon vertraut mit diesen Transformationen ist und konzentrieren uns deshalb auf Beispiele. Eine hilfreiche Quelle ist die Arbeit [1] von Li Kin Y. welche wir als Referenz verwenden [LK08].

Die Achsensymetrie wird sehr oft in der Olympiade verwendet. Sehr oft kann man auch neue Sachen entdecken, indem man eine Figur symetrisiert. Als Erinnerung:

[1] Li Kin Y., *Geometric Transformation I.* Mathematical Excalibur, HKUST, 2008.

Eine Symetrie mit Achse d schickt	**auf**
Eine Gerade l	auf eine Gerade l' welche sich mit l in d schneiden.
Ein Punkt P	auf einen Punkt P' mit $PP' \perp d$
Eine Strecke	Eine Strecke mit der gleichen Länge
Ein Dreieck	Ein dazu kongruentes Dreieck
Ein Kreis Ω	Ein Kreis Ω' wobei d die Potenzlinie von Ω und Ω'

Hier ein Beispiel der IMO 1985 mit Lösung von [LK08]

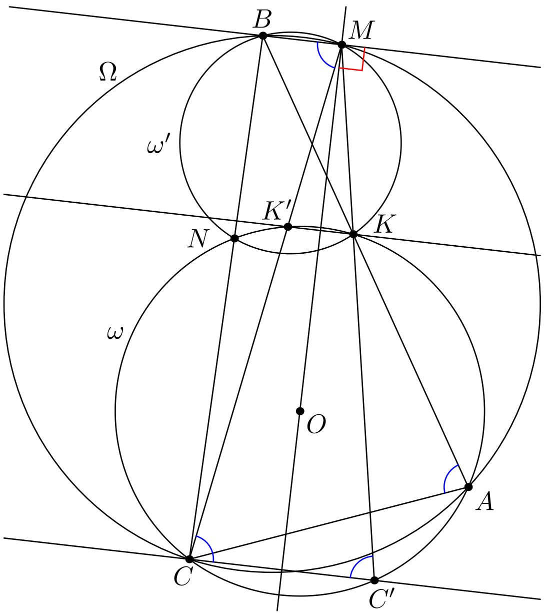


Abbildung 20: IMO 1985/5

Beispiel 8 (IMO 1985) *Ein Kreis ω mit Zentrum O geht durch die Ecken A und C des Dreieck ABC und schneidet die Seiten AB und BC in K beziehungsweise in N. Die Umkreise von Ω und ω' der Dreiecke ABC beziehungsweise KBN schneiden sich im Punkt M. Zeige, dass $\angle OMB = 90°$.*

Nachdem man öfter die Figur gezeichnet hat, wird man vielleicht bemerken, dass MO die Winkelhalbierende von KMC ist. Deshalb wird es interessant die Figur zu symmetrisieren bezüglich der Symmetrieachse MO. Auf folgende Art und Weise kann man die Aufgabe lösen:

Lösung. Sei L die Senkrechte zu MB durch O. Man bezeichne mit K' und C' die Spiegelungen von K und C bezüglich L. Es gibt drei Schritte zu beweisen.

1. Zuerst beweist man, dass KK', CC' und MB parallel sind und rechtwinklig an L.

2. Man beweist, dass C', K und M auf einer Gerade sind.

3. Man beweist, dass K', C und M auf einer Gerade sind.

Die beiden letzten Punkte reichen aus um den Beweis abzuschliessen: Da $C'K$ und CK' symmetrisch bezüglich L sind, schneiden sich auf L und somit liegt M auf L.
Für den ersten Punkt, da K' und C' die jeweiligen Spiegelungen von K beziehungsweise C sind, hat man dass KK' und CC' rechtwinklig zu L sind. Da MB auch rechtwinklig zu L ist, also sind MB, CC' und KK' alle rechtwinklig zu M und somit parallel zueinander.
Für den zweiten Punkt, indem man den Peripheriewinkelsatz in ω und ω' verwendet, erhält man (da C' und K' auf ω liegen)

$$\angle KC'C = 180^\circ - \angle KNC = \angle BNK = \angle BMK$$

Diese Gleichung und die Tatsache dass CC' und BM parallel sind, ergeben, dass C', K und M auf einer Gerade liegen.
Für den letzten Punkt, indem man die Symmetrie, den Peripheriewinkelsatz in ω und ω' sowie die Parallelität von BM und CC' verwendet, erhält man

$$\begin{aligned}\angle C'CK' &= \angle CC'K \\ &= \angle CAK \\ &= \angle CAB \\ &= \angle 180^\circ - BMC \\ &= \angle C'CM.\end{aligned}$$

Somit liegen K', C und M auf einer Geraden. □

3.3 Drehung und Punktspiegelung

Wie schon im ersten Kapitel verwenden wir vor allem Beispiele. Als Erinnerung :

Eine Spiegelung mit Zetrum O sendet	**auf**
Eine Gerade l	Eine Gerade l' parallel zu l
Ein Punkt P	Ein Punkt P' mit O dem Mittelpunkt von PP'
Eine Strecke	Einer dazu parallelen Strecke mit der gleichen Länge
Ein Dreieck	Ein dazu kongruentes Dreieck
Ein Kreis Ω	Ein Kreis Ω'
Eine Drehung mit Zentrum O von einem Winkel θ sendet	**auf**
Eine Gerade l	eine Gerade l' mit $\angle ll' = \theta$
Ein Punkt	Einen Punkt
Eine Strecke	Eine Strecke mit der gleichen Länge
Ein Dreieck	Ein dazu kongruentes Dreieck
Ein Kreis Ω	Ein Kreis Ω'

Wir werden die Punktspiegelung nicht speziell behandeln, da es sich nur um eine Drehung von 180°. Noch einmal eine Aufgabe von [LK08].

Beispiel 9 *Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Die Punkte P, Q, M und N sind auf der Seiten AB, BC, CD beziehungsweise DA, sodass*

$$AP + AN + CQ + CM = 2.$$

Zeige dass PM rechtwinklig zu QN ist.

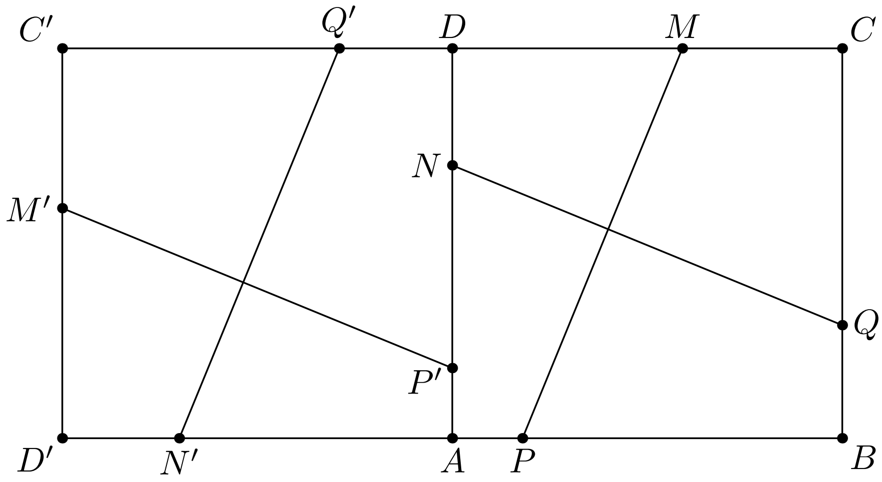


Abbildung 21: Beispiel 9

Lösung. Wir machen eine Drehung um 90° mit Zentrum A welche B auf D sendet, sowie P, Q, M, N, C, D auf Punkte welche wir P', Q', M', N', C' beziehungsweise D' nennen. Da CC' parallel zu BD' ist und

$$\begin{aligned} PN' &= PA + AN' \\ &= AP + AN \\ &= 2 - (CM + CQ) \\ &= CC' - (CM + C'Q') \\ &= MQ', \end{aligned}$$

Man hat also, dass $MPN'Q'$ ein Parallelogramm ist. Also ist $N'Q'$ parallel zu MP und somit (indem man eine zweite Rotation um 90° macht) ist NQ rechtwinklig zu MP. □

Im allgemeinen, die Idee ein Quadrat zu vergrössern, entweder indem man die Seiten als Symetrieachsen verwendet oder indem man das Quadrat vergrössert, kann manchmal helfen, auch in der Kombinatorik. Wir werden nun das Beispiel 6 der IMO-Selektion von 2013 lösen.

3.4 Translation

Bevor wir beginnen, rufen wir noch einmal alle wichtigen Eigenschaften in Erinnerung.

Eine Verschiebung um den Vektor $\vec{v}$ sendet	**auf**
Eine Gerade l	eine Gerade l' parallel zu l
Ein Punkt P	einen Punkt P' mit $\vec{PP'} = \vec{v}$
Eine Strecke	Eine parallel Strecke mit der gleichen Länge
Ein Dreieck	Ein dazu kongruentes Dreieck
Ein Kreis Ω	Ein Kreis Ω'

Währenddem man mit den parallelen Gerade oder einem Trapez konfrontiert wird, können Translationen sich genauso nützlich erweisen wie Vektoren. Eine seht oft verwendete Idee besteht darin, Dreieck zu Parallelogramme zu vervollständigen.

Beispiel 10 (BxMO 2018) *Sei ABC ein Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H und seien D, E und F die Mittelpunkte der Strecken AB, AC und AH. Die Spiegelung von B und C an F sind P beziehungsweise Q. Zeige, dass die Geraden PE und QD sich auf dem Umkreis von ABC schneiden.*

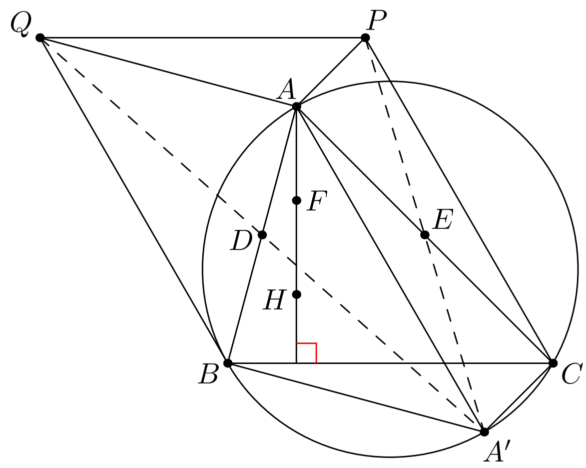


Abbildung 22: Beispiel 10

Lösung. Sei A' die Abbildung von A nach einer Verschiebung um den Vektor $\vec{QB}$. Ebenso bildet diese Verschiebung Q auf B ab, und da $PCQB$ ein Parallelogramm ist auch P auf C. Wir haben also eine Symetrie in F welche CHB auf QAP abbildet, und QAP auf $BA'C$. Somit, indem man diese Tatsache mehrmals verwendet, indem man die Summe der Winkel in BCH, den Höhenschnittpunkt H und die Winkelsumme im Dreieck ABC

verwendet, erhält man:

$$\begin{aligned}\angle BA'C &= \angle CHB \\ &= 180^\circ - \angle CBH - \angle HCB \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle BCA) - (90^\circ - \angle CBA) \\ &= 180^\circ - \angle BAC.\end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass A' auf dem Umkreis von ABC liegt. $AQBA'$ und $PAA'C$ sind parallelogramme, also sind D und E die Schnittpunkte ihrer Diagonalen. Daraus folgt, dass die Geraden PE und QD sich in dem Punkt A' schneiden, was den Beweis beendet. □

Ein anderes Beispiel von [LK08]:

Beispiel 11 *Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AD = BC$. Seien E, F die jeweiligen Mittelpunkte der Strecken CD und AB. Sei H der Schnittpunkt von AD und FE und G der Schnittpunkt BC und FE. Zeige, dass $\angle AHF = \angle BGF$.*

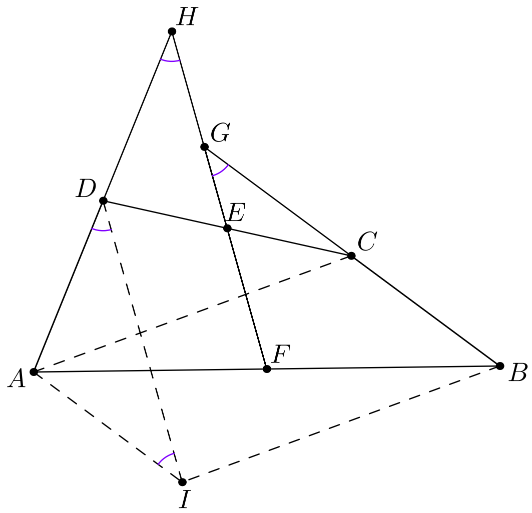


Abbildung 23: Beispiel 11

Lösung. Sei I die Abbildungen von A nach einer Verschiebung um den Vektor $\vec{CB}$. Somit ist $BCAI$ ein Parallelogramm. F ist der Mittelpunkt von BA und auch derjenige von CI. E und F sind die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks IDC, also hat man EF parallel zu DI. Indem man diese Tatsache damit verbindet, dass CB parallel zu AI ist, erhält man, dass $\angle BGF = \angle AID$. Wegen $AI = BC = AD$ folgt, dass DAI ein gleichschenkliges Dreieck ist und somit $\angle ADI = \angle AID$. Weil FH parallel zu DI, folgert man:

$$\angle AHF = \angle ADI = \angle AID = \angle BGF.$$

□

3.5 Zentrische Streckungen

Zuerst folgt eine kurze Zusammenfassung, wie sich eine zentrische Streckung auf die wichtigen Geometrischen Elemente auswirkt, dann folgt eine Erklärung wie zentrische Streckungen angewendet werden.

Eine zentrische Streckung mit Faktor λ sendet	**auf**
Eine Gerade l	Eine Gerade l' parallel zu l
Ein Punkt P	Ein Punkt P' mit $\vec{OP'} = \lambda\vec{OP}$
Eine Strecke der Länge s	Eine dazu parallele Strecke der Länge $\lvert\lambda\rvert s$
Ein Dreieck	Ein dazu ähnliches Dreieck
Ein Kreis mit Radius r	ein Kreis mit Radius $\lvert\lambda\rvert r$

Auch haben wir:

Satz 3.1 (Zentrische Streckung für Ähnliche Dreiecke) *Seien ABC und $A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke, sodass $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ und $AC \parallel A'C'$. Also schneiden sich AA', BB' und CC' in einem Punkt.*

Hier muss noch bedacht werden, dass die Gerade AA', BB' und CC' parallel zueinander sein können. In diesem Fall schneiden sich die Geraden AA', BB' und CC' überhaupt nicht, beziehungsweise in einem Punkt, der im unendlichen liegt.

Beispiel 12 (MEMO 2018) *Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei D der Fusspunkt der Höhe von A. Seien R und Q die Schwerpunkte der Dreiecke ABD bzw. ACD. Sei P ein Punkt auf der Strecke BC, sodass die Punkte P, Q, R und D auf einem Kreis liegen. Zeige, dass die Geraden AP, BQ und CR einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.*

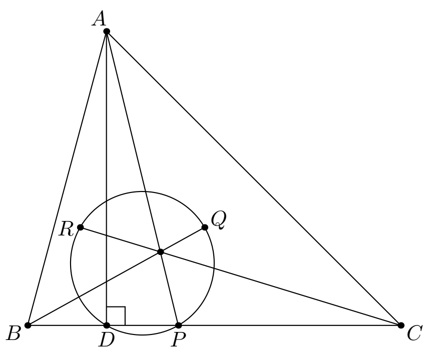


Abbildung 24: Beispiel 12

Lösung. Nehmen wir einmal an, dass PQR ähnlich zu ABC ist und das $AB \parallel PQ$ und $BC \parallel QR$. Also gibt es eine zentrische Streckung, die PQR auf ABC abbildet und somit schneiden sich AP, BQ und CR in einem Punkt. Working Backward hat diese Aufgabe also sehr vereinfacht. Nun müssen wir noch die Tatsache verwenden, dass R und Q die Schwerpunkte eines Dreieckes sind. Wir verlängern die Gerade DR und bezeichnen den Schnittpunkt von DR und AB mit M. Ebenso bezeichnen wir den Schnittpunkt der Gerade DQ und AC mit N. Da R und Q die Schwerpunkte eines Dreiecks sind, gilt $\frac{DR}{RM} = \frac{DQ}{QN} = \frac{1}{2}$. Daraus folgt, dass die Geraden MN und QR parallel sind. Da aber M und N die Mittelpunkte der Strecken AB beziehungsweise AC sind, ist CB parallel zu MN und somit auch zu RQ. Die Ähnlichkeit der Dreiecke PQR und ABC folgt nun mit Winklejagd und ist dem Leser als Übung überlassen. □

Beispiel 13 *Sei ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt der Strecke BC und D ein Punkt auf der Geraden AB, sodass B zwischen A und D liegt. Sei E ein Punkt auf der anderen Seite der Geraden CD als B, sodass $\angle EDC = \angle ACB$ und $\angle DCE = \angle BAC$. Sei F der Schnittpunkt von CE mit der Parallelen zu DE durch A und sei Z der Schnittpunkt von AE und DF. Zeige, dass sich die Geraden AC, BF und MZ in einem Punkt schneiden.*

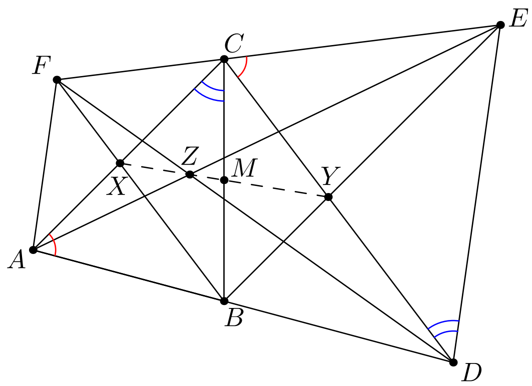


Abbildung 25: Beispiel 13

Lösung. Zuerst einmal führen wir zwei neu Punkte ein. Sei X der Schnittpunkt von AC und BF und sei Y der Schnittpunkt von BE und CD. Da $\angle EDC = \angle ACB$ und $\angle DCE = \angle BAC$ sind ABC und CDE ähnlich zueinander. Also gilt

$$\angle CBD = 180° - \angle BAC - \angle BCA = \angle DEC.$$

Somit ist $CBDE$ ein Sehnenviereck. Anschliessend gilt wegen der der Bedingung AF parallel zu DE :

$$\angle AFC = 180° - \angle DEF = \angle DBC = 180° - \angle CBA.$$

Somit ist $BCFA$ auch ein Sehnenviereck . Mit diesem Sehnenviereck findet man $\angle FCA = \angle FBA$ und

$$\begin{aligned}\angle BED &= \angle BCD \\ &= 180° - \angle BCA - \angle ACF - \angle DCE \\ &= 180° - \angle BCA - \angle ABF - \angle BAC \\ &= \angle FBC.\end{aligned}$$

Folglich sind FB und DC parallel. Des Weiteren gilt, $\angle BEA = \angle DEA - \angle DEB = \angle FAE - \angle FAC = \angle CAE$. Somit sind auch die Geraden CA und BE parallel. Somit ist $XBYC$ ein Parallelogramm und das heisst, das M auf der Strecke XY liegt. Da FAX und DYE zwei ähnliche Dreiecke sind, bei welchen alle Seiten parallel sind, gibt es eine zentrische Streckung, die ein Dreieck auf das andere abbildet. Das Streckzentrum ist der Schnittpunkt von AE, FD und XY. Also Z. Somit liegt Z auf der Strecke XY. Das heisst, die Geraden AC, BF und MZ schneiden sich in X. □

Beispiel 14 (St. Petersburg Math Olympiad 1996) *Im Dreieck ABC gilt $\angle BAC = 60°$. Sei O ein Punkt in ABC sodass $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$. Seien D und E die Mittelpunkte der Strecken AB beziehungsweise AC. Zeige, dass A, D, O und E auf einem Kreis sind.*

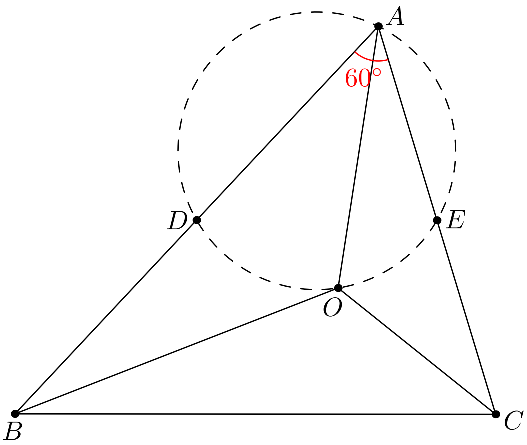


Abbildung 26: Beispiel 14

Lösung [LK08]. Weil

$$\begin{aligned}\angle OAB &= \angle CAB - \angle CAO \\ &= 60° - \angle CAO \\ &= 180° - 120° - \angle CAO \\ &= 180° - \angle AOC - \angle CAO \\ &= \angle OCA,\end{aligned}$$

und $\angle AOC = \angle BOC = 120°$ hat man die Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und OCA. Daher wird es interessant eine Abbildung zu finden, welche OAB auf OCA sendet. Also zum Beispiel eine Drehung von 180° mit einer zentrischen Streckung. Wir nennen diese Abbildung φ. Diese sendet $A \mapsto B$, $C \mapsto A$, $O \mapsto O$ und $E \mapsto D$. Somit

$$\begin{aligned}\angle OEA + \angle ADO &= \angle\varphi(O)\varphi(E)\varphi(A) + \angle ADO \\ &= \angle ODB + \angle ADO \\ &= 180°,\end{aligned}$$

was den Beweis beendet □

Es ist ziemlich einfach eine Abbildung zu suchen, welche ein Dreieck auf ein anderes ähnliches Dreieck sendet aber manchmal trotzdem sehr hilfreich. Als Beispiel kann man die Aufgabe 5 der MEMO 2014 verwenden, welche jedoch als Übung überlassen wird.

4 Erste Schritte der Trigonometrie (A. Maret)

4.1 Einführung

Die trigonometrischen Funktionen verbinden auf eine direkte Art und Weise Algebra mit der Messung von Winkeln und Streckenlängen. Im Gegensatz dazu geben ähnliche Dreiecke nur eine indirekte Art um Verhältnisse zu vergleichen. Es ist wichtig zu wissen, dass um zu beweisen, dass zwei Winkels eines Dreieckes gleich sind, reicht es zu überprüfen, ob die Längen ihrer Seiten eine bestimmte algebraische Gleichung erfüllen. Die Trigonometrie wird uns erlauben direkt die Werte von gewissen Winkeln zu berechnen wenn die Seitenlängen bekannt sind. Ebenso erlaubt sie, die Seitenlängen mit den Winkeln zu berechnen. Um herauszufinden ob die Winkel gleich sind, reicht es also zu überprüfen ob die berechneten Werte gleich sind.

Im Rahmen der Mathematik-Olympiade ist die Trigonometrie sowohl ein mächtiges als auch ein gefährliches Werkzeug. Es wird seht stark davon abgeraten, einfach einmal Trigonometrie anzuwenden um herauszufinden, was dabei herauskommt. **Ein trigonometrischer Ansatz ohne korrekte Lösung wird grundsätzlich mit 0 Punkten benotet !** Die mangelnde Erfahrung wird sich dann oft durch mehrere Seiten voller trigonometrischer Ausdrücke ohne irgend ein Resultat ausdrücken. Nur Übung und eine gute Kenntnis der trigonometrischen Formeln erlauben es, die Macht der Trigonometrie zu benutzen. Es wird also allen Teilnehmern sehr stark ans Herz gelernt zuerst eifrig die Trigonometrie zu üben, bevor sie sich währen einer Prüfung Trigonometrie anwenden.

Das erste Kapitel ist dazu da, um alle Definitionen der Trigonometrie noch einmal in Erinnerung zu rufen und auch um ihre grundlegenden Eigenschaften aufzuzeigen. Dieser Stoff wird normalerweise in der Schule unterrichtet und ist deshalb vor allem der Vollständigkeit halber hier noch einmal erwähnt.

4.2 Konstruktion von Sinus, Kosinus und Tangens

Es ist wichtig, dass man einen Winkel nicht mit seiner Messung verwechselt. Ein Winkel ist der Teil der Ebene welcher durch zwei Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung aufgespannt wird, währenddem die Messung des Winkels eine reelle Zahl ist welche der Anteil der Ebene bestimmt die durch den Winkel besetzt wird.

Es gibt drei fundamentale trigonometrische Funktionen welche jeder Messung eines Winkels eine reale Zahl zuordnen. In der Literatur ist es ein Brauch, dass man eher mit

Radiant als mit Grad arbeitet. In dem Massstab Radiant entspricht ein kompletter Winkel (das heisst ein Winkel von 360° einer Messung von 2π. Die Messung von den anderen Winkel ist dazu proportionell. Zum Beispiel, ein Winkel von 180° entspricht π Radiant und ein rechter Winkel ist gleich viel wie $\pi/2$ Radiant. Im allgemeinen, wenn d die Messung eines Winkels in Grad ist und r die Messung eines Winkels in Radiant, hat man folgende Gleichung :

$$d = \frac{180}{\pi} \cdot r \iff r = \frac{\pi}{180} \cdot d.$$

Wir beschreiben nun wie der Kosinus und der Sinus einer reellen Zahl berechnet werden kann. Man beginnt indem man den Einheitskreis Γ mit **Radius 1** um den Ursprung zeichnet. Man zeichnet anschliessend den Winkel θ, ausgehend von der positiven horizontalen Halbachse und im **Gegenuhrzeigersinn** falls $\theta > 0$, beziehungsweise im **Uhrzeigersinn** falls $\theta < 0$. Man kann sich auch einen Zeiger vorstellen der am Ursprung fixiert ist und dann gedreht wird bis er mit der positiven x-Achse den richtigen Winkel aufspannt. Der Zeiger ist somit auf einen eindeutig definierten Punkt $X(\theta)$ auf dem Kreis Γ gerichtet, wie die Figur 4.2 zeigt. Zum Beispiel hat man $X(0) = (1; 0)$ und $X(\pi/2) = (0; 1)$.

Da eine komplette Umdrehung einem Wert von 2π entspricht, können zwei verschiedene Werte von θ auf den gleichen Punkt X auf Γ zeigen. Dies ist der Fall wenn zwei Werte von θ "kongruent modulo 2π sind", das heisst diese beiden Winkel unterscheiden sich um ein vielfaches von 2π. Zum Beispiel geben die Winkel $\theta_1 = \pi/4$ und $\theta_2 = 2\pi + \pi/4$ den gleichen Punkt $X(\theta)$ auf dem Einheitskreis Γ.

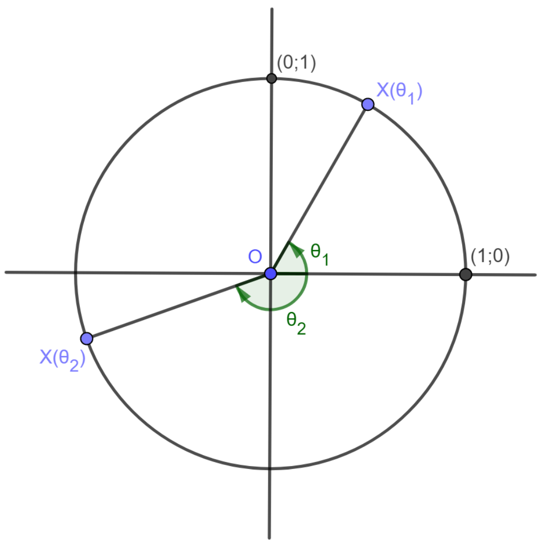


Abbildung 27: Les points $X(\theta_1)$ et $X(\theta_2)$ déterminés pour les valeurs de $\theta_1 \approx \pi/3$ et $\theta_2 \approx -7\pi/8$.

Definition 4.1 (Sinus und Kosinus) Der Sinus ist definiert als die y-Koordinate des Punktes $X(\theta)$ und der Kosinus ist definiert als die x-Koordinate des Punktes $X(\theta)$. Das heisst :

$$X(\theta) = (\cos(\theta); \sin(\theta)).$$

In anderen Worten sind der Sinus und der Kosinus wie folgt definiert: Man projiziert den Punkt $X = X(\theta)$ auf die horizontal und die vertikale Achse. Seien H und V die jeweiligen Projektionen. Der Kosinus von θ, $\cos(\theta)$ ist also gegeben durch die **gerichtete Strecke** OH und der Sinus von θ, $\sin(\theta)$ ist also gegeben durch die **gerichtete Strecke** VH. Was heisst gerichtete Strecke ? Die Punkte H und V befinden sich auf den beiden Achsen. Die Strecke OH ist positiv, falls H rechts vom Ursprung ist und negativ falls H sich auf der linken Seite des Ursprungs befindet. Genau gleich ist OV positiv, wenn sich V oberhalb vom Ursprung befindet und negativ falls V unterhalb des Ursprunges liegt.

Um nun den Tangens von θ zu definieren, führt man die Tangente t an den Kreis Γ am Punkt $(1; 0)$ ein. Man verlängert ausserdem die Gerade OX und man definiert $T(\theta)$ als Schnittpunkt dieser Gerade mit t. Falls zum Beispiel $\theta = \pi/2$ sind die beiden Geraden parallel und haben keinen Schnittpunkt. Das ist der Fall für alle Werte $\theta = \pi/2 + k\pi$ mit einer ganzen Zahl k. In diesem Fall ist der Tangens undefiniert. In allen anderen Fällen ist der Tangens wie folgt definiert.

Definition 4.2 (Tangens) Der Tangens von $\theta \neq \pi/2+k\pi$ ist definiert als die y-Koordinate von dem Punkt $T(\theta)$. Das heisst:

$$T(\theta) = (1; \tan(\theta)).$$

In anderen Worten, der Tangens von θ, $tan(\theta)$ ist gegeben durch die Länge der **gerichteten Strecke** von dem Punkt $(1; 0)$ und dem Punkt $T(\theta)$. Dieses Mal ist die Länge positiv wenn der Punkt $T(\theta)$ oberhalb von dem Punkt $(1; 0)$ liegt und negativ wenn der Punkt $T(\theta)$ unterhalb von dem Punkt $(1; 0)$ liegt.

Diese Grafik welche für die Konstruktion von allen trigonometrischen Funktionen verwendet wird heisst *Einheitskreis*. Wir werden sehen, dass es grunsätzlich ausreicht eine Skizze des Einheitskreises zu machen um die verschiedenen trigonometrischen Formeln wiederzufinden und sich an einige grundsätzliche Werte zu erinnern. Lernt, mit diesem Werkzeug zu arbeiten, so müsst ihr euch nicht an alle Formeln erinnern.

4.2.1 Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Da die Punkte H und V sich innerhalb des Kreises Γ befinden, welcher einen Radius 1 hat, sind die Werte des Kosinus und des Sinus von θ immer zwischen -1 und 1 egal für welchen Wert von θ. Das heisst, beide Funktionen sind **surjektiv** von der reellen Zahlen auf das Intervall $[-1, 1]$:

$$\sin\colon \mathbb{R} \to [-1; 1],$$
$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1; 1].$$

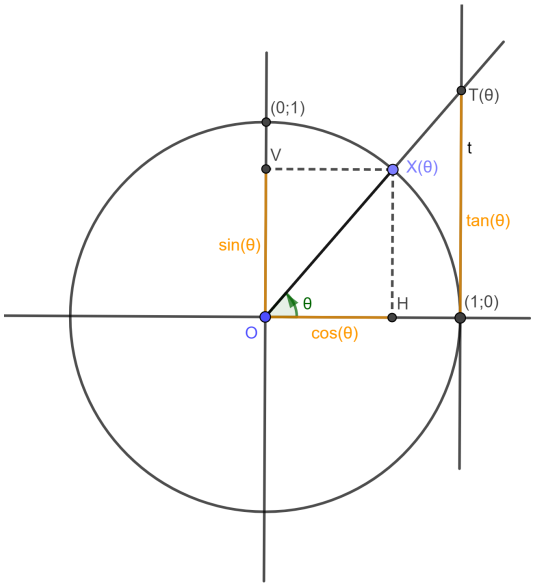


Abbildung 28: Konstruktion des kosinus und des Sinus eines Wertes $\theta > 0$. In diesem Fall ist θ ungefähr $\pi/4$. Man kann also feststellen, dass der Kosinus und der Sinus positiv sind.

Zudem, währenddem sich θ dem Wert $\pi/2$ annähert, befindet sich der Punkt $T(\theta)$ welcher den Tangens definiert immmer weiter oben auf der Gerade t. Genau gleich, falls θ sich dem Wert $-\pi/2$ annähert befindet sich der Punkt $T(\theta)$ immer weiter unten auf der Gerade t. Das heisst, die Funktion Tangens kann jeden reellen Wert erreichen, das heisst die Funktion Tangens ist **surjektiv** auf die Menge der reellen Zahlen:

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.$$

Es wurde bereits erwähnt, dass dir Position des Punktes $X(\theta)$ sich nicht verändert wenn man den Wert von θ um ein Vielfaches von 2π verändert. Die Position des Punktes $T(\theta)$ ist hingegen identisch sobald man den Wert von θ um ein Vielfaches von pi verändert. Der mathematische korrekte Ausdruck dafür ist, dass die Funktionen Kosinus und Sinus **periodisch** mit einer minimalen Periode von 2π sind und die Funktion Tangens ist periodisch mit einer minimalen Periode von π:

$$\begin{cases} \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), & \\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), & \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta), & \end{cases}$$

Die Konstruktion der trigonometrischen Funktionen erlaubt es uns, einige Grundwerte der genannten Funktionen zu berechnen. Es ist zum Beispiel einfach zu sehen, dass für $X(0) = (1;0), X(\pi/2) = (0;1), X(-\pi/2) = (0;-1)$ und schliesslich $X(\pi) = (-1;0)$.

Ebenso gilt, $T(0) = (1;0), T(\pi/4) = (1;1)$ und ebenso $T(-\pi/4) = (1;-1)$. Daraus folgert man

	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
cos	0		1		0	-1
sin	-1		0		1	0
tan	-	-1	0	1	-	0

Man bemerkt ebenfalls, indem man die Entwicklung des Punktes $X(\theta)$ auf dem Einheitskreis betrachtet, während θ grösser wird , dass die Sinusfunktion **streng monoton steigend** ist auf dem Intervall $[-\pi/2;\pi/2]$ und die Kosinusfunktion ist **streng monoton fallend** auf dem Intervall $[0;\pi]$. Diese beiden Bemerkungen spielen eine wichtige Rolle wenn es um die **Injektivität** der Funktionen geht. Zum Beispiel, wenn α und β zwei Winkel eines spitzwinkligen Dreieckes sind, sodass $\sin(\alpha = \sin(\beta)$, also hat man $\alpha = \beta$. Der Tangens ist **streng monoton steigend** auf dem Intervall $]-\pi/2;\pi/2[$. Wir werden die Injektivität noch detaillierter behandeln.

Man kann ebenfalls feststellen, dass der Sinus und der Tangens **ungerade** sind , währenddem der Kosinus **gerade** ist.

$$\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta),\\
\cos(-\theta) &= \cos(\theta),\\
\tan(-\theta) &= -\tan(\theta).
\end{aligned}$$

Wie kann man solche Eigenschaften beweisen ? Wieder einmal durch ein Beweis durch Beobachtung. Die Figur 3 gibt sofort das gewünschte Resultat.

Alle oben genannten Eigenschaften erlauben es, ohne grosse Schwierigkeiten den Graph der trigonometrischen Funktionen zu zeichnen. Ebenfalls kann ein geübtes Auge auch alle aufgelisteten Eigenschaften direkt vom Graph ablesen.(Durch eine Betrachtung der Figuren 30 und 31). Aus diesem Grund ist es wichtig sich entweder an die Eigenschaften oder an den Graph zu erinnern.

Grundlegende Formeln Wir werden jetzt die algebraischen Eigenschaften der Trigonometrischen Funktionen herleiten. Wenn man noch einmal Figur 2 betrachtet, stellt man fest, dass die Geraden HX und t parallel sind. In dem man den Strahlensatz verwendet, findet man donc $\frac{HX}{OH} = \frac{AT}{OA}$, wobei A der Punkt $(1;0)$ bezeichnet. Indem man die Tatsache verwendet, dass $OA = 1$, findet man folgende Formel :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Zudem, da dass Dreieck OHX rechtwinklig ist in dem Punkt H und $OX = 1$, findet man durch den Satz von Pythagoras folgenden Formel :

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

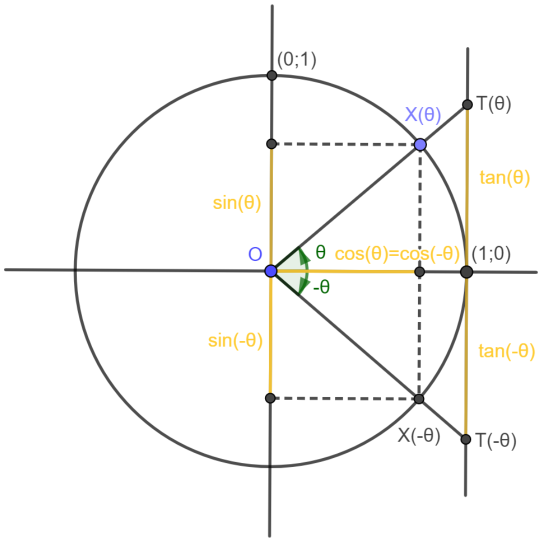


Abbildung 29: Konfiguration des Einheitskreises in welchem die Winkel θ und $-\theta$ repräsentiert sind. Aus Symmetriegründen bezüglich der horizontalen Achse kann man schlussfolgern, dass der Kosinus gerade und der Sinus und der Tangens ungerade sind.

Man kann beide Formeln kombinieren und findet:

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta).$$

Ergänzungswinkel und Komplementärwinkel Wenn man versucht eine Aufgabe mit Winkeljagd zu lösen, erscheinen oft Ergänzungswinkel und Komplementärwinkel. Es ist deshalb wichtig, auch den Sinus und den Kosinus von diesen Winkel zu kennen. Wie für die Parität des Sinus und des Kosinus, kann man diese Formeln direkt vom Einheitskreis ablesen. Noch einmal, es ist einfacher sich an die Methode zu erinnern als sich an die Formeln zu erinnern. Ratschlag eines Freundes.

In algebraischen Ausdrücken entspricht die Figur 4.2.1 folgenden Ausdrücken:

$$\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta), \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \end{cases}$$

Die unten aufgelisteten Formeln kann man mit ähnlichen Zeichnungen beweisen.

$$\begin{cases} \sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin(\theta), \\ \cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta), \\ \tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan(\theta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin(\theta), \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp 1/\tan(\theta), \end{cases}$$

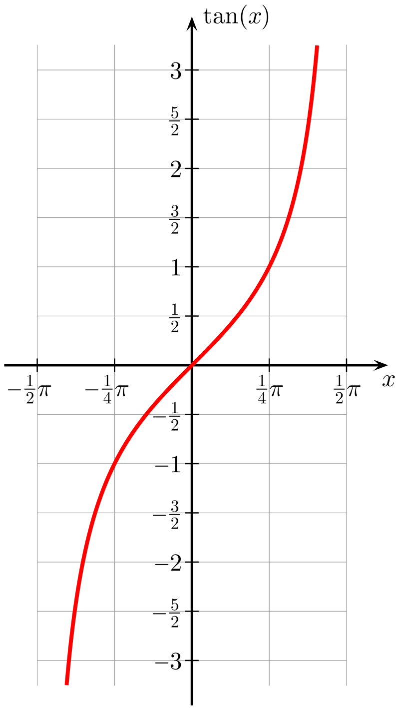


Abbildung 30: Der Graf des Tangens mit der Länge einer Periode von $-\pi/2$ bis $\pi/2$.

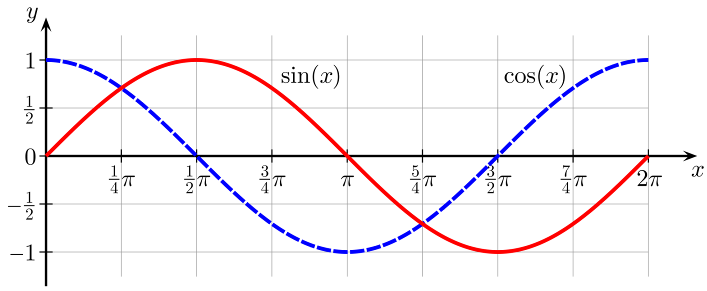


Abbildung 31: Der Graf des Kosinus und Sinus mit der Länge einer Periode zwischen 0 und 2π.

Bemerkungen über die Injektivität Die Funktionen Kosinus und Sinus sind nicht injektiv, auch wenn man sie auf ein Intervall mit der Länge der minimalen Periode 2π reduziert. Man hat zum Beispiel $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ und $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$. Es handelt sich hier aber um das einzige Hindernis der Injektivität auf einem Intervall der Länge 2π. Das heisst, man kann die Winkel trotzdem in ein Verhältnis zueinander setzen.

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ so dass } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ oder} \\ \theta_1 = -\theta_2 + 2k\pi, \end{cases}$$

et

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ so dass } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ oder} \\ \theta_1 = \pi - \theta_2 + 2k\pi. \end{cases}$$

Der Tangens ist injektiv auf dem Intervall $]-\pi/;\pi/2[$. Das heisst :

$$\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ so dass } \theta_1 = \theta_2 + k\pi.$$

Summe von Winkeln Eine Winkeljagd führt oft dazu, dass man Summen von Winkeln hat. Es ist also wünschenswert eine trigonometrische Formel für die Summe von zwei Winkeln zu haben. Wie wir sehen werden, sind diese Formeln komplizierter als die bisherigen trigonometrischen Formeln. Sie werden hier mit einer guten Eselsbrücke eingeführt,

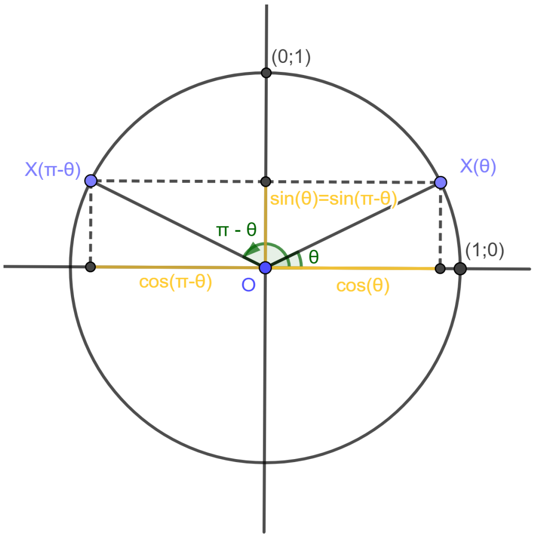


Abbildung 32: Konfiguration des Einheitskreises bei welcher die Winkel θ et $\pi - \theta$ repräsentiert sind. Aus Symmetriegründen bezüglich der senkrechten Achse hat man die gewünschten trigonometrischen Formeln.

damit man sich wieder an diese Formeln erinnern kann. Die Idee ist die eulersche Formel für komplexe Zahlen zu verwende:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Man findet also einerseits mit der eulersche Formel

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

und andererseits mithilfe der Formeln für die Exponenten,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \\ &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)). \end{aligned}$$

Somit findet man die Formel für die Summe von Winkeln.

$$\begin{cases} \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \end{cases}$$

Indem man θ_2 mit $-\theta_2$ ersetzt und indem man die Regeln den Parität verwendet findet man die Formeln für die Differenz von Winkeln:

$$\begin{cases} \sin(\theta_1-\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \end{cases}$$

Wie bereits erwähnt, kann man den Tangens als Bruch mit Sinus über Kosinus schreiben. Mit den vorangehenden Formeln findet man

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan(\theta_1)+\tan(\theta_2)}{1-\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}, \quad \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan(\theta_1)-\tan(\theta_2)}{1+\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}.$$

Das Doppelte eines Winkels Wenn man die Winkel $\theta_1 = \theta_2 =: \theta$ gleichsetzt, dann folgt mithilfe der Formeln für die Winkelsumme sofort die Formel für das Doppelte eines Winkels:

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta),\\ \cos(2\theta) &= \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 1 - 2\sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1,\end{aligned}$$

wobei man für den Kosinus die Formel $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$ verwendet hat um den gefunden Ausdruck anders zu schreiben. Indem man die Bruchschreibweise des Tangens verwendet, findet man von neuem die betreffende Formel für den Tangens:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}.$$

Summen in Produkte umformen Diese letzten Formeln, welche sehr technisch sind, werden sich als sehr nützlich erweisen. Von allen hier aufgelisteten trigonometrischen Formeln sind sie aber auch die kompliziertesten. Die Idee ist, jede Summe von zwei trigonometrischen Funktionen als Produkt auszudrücken und umgekehrt. Zum Beispiel, indem man die Formel für die Summe und die Differenz von zwei Winkel addiert, findet man :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) &= \frac{1}{2}(\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)),\\ \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) &= \frac{1}{2}(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)),\\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) &= \frac{1}{2}(-\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)).\end{aligned}$$

Indem man die Winkel $\alpha_1 := \theta_1 + \theta_2$ und $\alpha_2 := \theta_1 - \theta_2$ definiert, kann man die Formeln auf folgende Art und Weise neu schreiben:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) &= 2\sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right),\\ \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) &= 2\cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right),\\ \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) &= -2\sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Es gibt auch ähnliche Formeln für den Tangens. Man findet sie, indem man den Tangens als Bruch von Sinus über Kosinus schreibt und mithilfe der Verwendung der Formel für die Summe von zwei Winkeln:

$$\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2) = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)},$$
$$\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2) = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)}.$$

4.2.2 Formelsammlung

Um auf eine effiziente Art und Weise die trigonometrischen Formeln in Olympiadenproblemen anzuwenden, muss man die trigonometrischen Formeln kennt denn ohne diese ist es unmöglich, die gefunden Ausdrücke zu vereinfachen. Sie auswendig zu lernen ist nicht sehr schlau, da es zu viele Formeln sind. Aus diesem Grund empfehlen wir, dass ihr versucht den Weg zu erinnern wie wir diese Formeln in diesem Skript hergeleitet haben. Erinnert-euch zum Beispiel daran, dass man die Formel für eine Winkelsumme mit der Euler-Formel für komplexe Zahlen finden kann. Wir fassen noch einmal alles verwendeten Formeln in folgender Tabelle zusammen. Sie ist eine gute Hilfe wenn ihr versucht Aufgaben mit Trigonometrie zu lösen.

TABLE

4.3 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

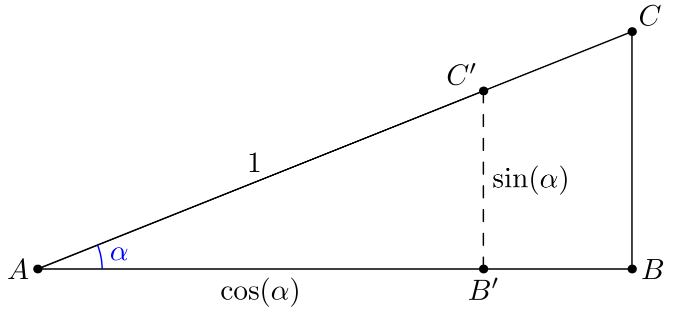
Da wir die Trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis eingeführt haben, sind wir momentan noch auf einen Kreis mit Radius eins beschränkt. Mit Hilfe der zentrischen Streckung können wir aber die Definition an einen allgemeinen Kreis anpassen. Somit können wir auch in einem rechtwinkligen Dreieck arbeiten. Das ist der Sinn von folgendem Theorem:

Satz 4.1 (Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck) *Sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Winkel in C. α ist der Winkel in A. Also :*

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}},$$
$$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}},$$
$$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}.$$

In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es niemals stumpfe Winkel. Die Konsequenz davon ist, dass die drei Trigonometrischen Funktionen immer reelle positive Zahlen geben. Die Konsequenz davon ist, dass wir uns nicht um die gerichteten Strecken kümmern müssen.

Beweis. Der Beweis für die Formeln im rechtwinkligen Dreieck ist eine Anwendung des Strahlensatzes. Es reicht die Figur im Einheitskreis zu rekonstruieren. Sei B' ein Punkt



auf AB mit einer Distanz 1 von A und sei C' seine Projektion auf AC. Man verwendet nun den Kreis mit Zentrum A welcher durch B' und somit ein Einheitskreis ist.

Gemäss der Definition hat man

$$\sin(\alpha) = B'C', \quad \cos(\alpha) = AC'.$$

Durch den Strahlensatz, da die Geraden $B'C'$ und BC parallel sind, findet man schliesslich:

$$\sin(\alpha) = B'C' = \frac{BC}{AB}, \quad \cos(\alpha) = AC' = \frac{AC}{AB}.$$

Somit hat man

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{BC}{AC}.$$

$\square$

Die Trigonometrie liefert alle Sorten von Formeln. Eine davon erlaubt es, die Fläche eines Dreieckes nur mithilfe von den Messungen eines Winkels und den zwei dazugehörigen Seiten.

Beispiel 15 (Fläche eines Dreieckes) *Sei ABC ein Dreieck. Wir verwenden die Standardschreibweise für die Seiten $a := BC, b := AC, c := AB$ und α, β, γ sind die jeweiligen Winkel in A,B und C. Sei $[ABC]$ die Fläche des Dreieckes ABC. Also hat man*

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin(\beta).$$

Lösung. Wir werden sehen, dass es sich um eine einfache Anwendung der trigonometrischen Formeln in einem rechtwinkligen Dreieck handelt. Sei H die Projektion von A auf BC. Wir wissen, dass

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH.$$

Der Konstruktion gemäss ist das Rechteck BAH rechtwinklig in H. Die trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck geben Folgendes Verhälnis:

$$\sin(\beta) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypothénuse}} = \frac{AH}{AB}.$$

Man hat somit $AH = c \cdot \sin(\beta)$ und schlussfolgert damit dass $[ABC] = 1/2 \cdot ac \cdot \sin(\beta)$. Die anderen Formeln kann man auf symmetrische Art und Weise schlussfolgern. $\square$

Beispiel 16 (Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes) *Sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Winkel in C. Also ist die Länge der Höhe im Quadrat gleich gross wie die das Produkt der beiden Streckenlänge welche durch die Höhe auf der Hypotenuse gegeben sind. Das heisst, falls H die Höhe von dem Punkt C ist, dann hat man:*

$$CH^2 = AH \cdot BH.$$

Lösung. Die Dreieck ACH und BCH haben eine rechten Winkel in H. Der Tangens verbindet die Seitenlängen AH und CH mit dem Winkel in A, α, im Dreieck ACH. Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{CH}{AH}.$$

Mit Winkeljagd folgt $\angle HBC = 90° - \angle HAC = 90° - \alpha$. Im Dreieck BCH, hat man also durch eine analoge Argumentation:

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{CH}{BH}.$$

Man muss sich also nur noch daran erinnern, dass $\tan(90° - \alpha) = 1/\tan(\alpha)$. Indem man die beiden Formeln miteinander multipliziert findet man die gewünschte Gleichung. $\square$

4.4 Sinussatz und Kosinussatz

Der Sinn hinter der folgenden Theoreme ist folgende: Die Seitenlänge eines Dreieckes bestimmen es eindeutig (abgesehen von einer Drehung und Verschiebung.) Die Seitenlängen bestimmen ebenfalls die Winkel. Allerdings haben wir bisher keine Methode gesehen, die Winkel ausgehend von den Seitenlängen zu berechnen. Die folgende Theoreme füllen diese Lücken.

Satz 4.2 *Sei ABC ein Dreieck. Man bezeichne die Seitenlängen mit $a = BC, b := AC, c := AB$ und die Winkel in A, B, C jeweils mit α, β, γ. Sei R der Radius des Umkreis durch ABC. Also*

1. *(Sinussatz)*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R,$$

2. *(Kosinussatz)*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha), \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma). \end{aligned}$$

Bevor diese beiden Theoreme bewiesen werden, gibt es noch einige Bemerkungen. Ein Art und Weise den Sinussatz zu interpretieren ist, indem man ihn als eine Verallgemeinerung der ähnlichen Dreiecke (allerdings ein viel mächtigeres Werkzeug). Das heisst, wenn man zwei Dreiecke mit gleichen Winkel hat und den Sinussatz des einen Dreieck und durch den Sinussatz eines anderen Dreieckes dividiert, erhält man die Gleichung für ähnliche Dreiecke. Die Formel für den Radius des Umkreises ist ein kleiner Bonus.

Der Kosinussatz kann als eine Verallgemeinerung des Satz von Pythagoras gesehen werden. Für den Spezialfall $\alpha = \pi/2$, das heisst falls das Dreieck ABC rechtwinklig in A ist, dann erhält man mithilfe des Kosinussatzes $a^2 = b^2 + c^2$, da $\cos(\pi/2) = 0$. Man findet also den Satz von Pythagoras.

Gemeinsam erlauben der Sinussatz und der Kosinussatz ausgehend von genügend Parametern alle Seiten und Winkel jedes Dreieckes zu bestimmen. Wenn man zum Beispiel die drei Seitenlängen eines Dreieckes kennt, kann man mit dem Kosinussatz den ersten Winkel und anschliessend mit dem Sinussatz die beiden andreren Winkel berechnen. Genau gleich, wenn man zwei Winkel und eine Seitenlänge kennt, dann kann man zuerst den letzten Winkel berechnen und dann mit dem Sinussatz die beiden verbleibenden Seitenlängen berechnen.

Die Strategie ist normalerweise folgende : Indem man den Sinussatz und den Kosinussatz an verschiedenen Dreiecken einer Aufgabe anwendet, findet man mehrere Gleichungen zwischen Streckenlängen und Winkeln. Wenn man die Dreiecke vernünftig gewählt hat, kann man trigonometrischen Gleichungen verwenden um dann neue geometrische Tatsachen zu entdecken.

Beweis. Beginnen wir mit dem Sinussatz. Der Beweis ist kurz und verwendet ein einfaches Argument der Symmetrie. Von dem vorangehenden Beispiel weiss man, dass man die Fläche eines Dreieckes ABC mit folgender Formel berechnen kann: $[ABC] = 1/2 \cdot ab\sin(\gamma)$. Wenn man die Formel abändert um die Terme erscheinen zu lassen die im Sinussatz vorkommen, erhält man

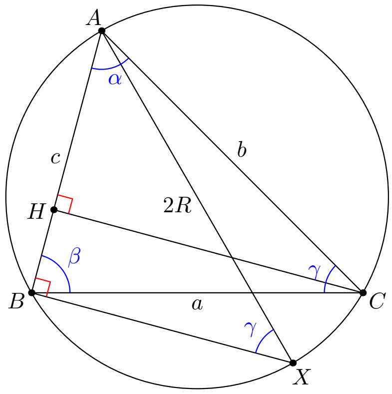
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2[ABC]}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist symmetrisch in a, b und c. es folgt daraus, dass die linke Seite auch symmetrisch in a, b und c. Darauf folgt

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

Und wie kommt der Umkreisradius in die Formel ? Man bezeichne mit ω den Umkreis des Dreiecks ABC und sei X der Punkt auf der gegenüberliegenden Seite von A, sodass AX ein Durchmesser ist. Also hat das Dreieck AXB ein rechter Winkel in B. Zudem gilt $\angle AXB = \angle ACB = \gamma$. Indem man die trigonometrischen Formeln für das Rechteck AXB verwendet, erhält man

$$\sin(\gamma) = \frac{AB}{AX} = \frac{c}{2R} \Longleftrightarrow \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$



Nun beweisen wir noch den Kosinussatz. Wir haben die Ähnlichkeit zwischen dem Kosinussatz und dem Satz von Pythagoras bereits erwähnt. Wir werden somit einen rechten Winkel erscheinen lassen, um den Satz von Pythagoras anzuwenden. Sei also H die Projektion von C auf AB. Das Dreieck CHA ist rechtwinklig in H. Die trigonometrischen Formeln angewendet am Punkt A des Dreieck CHA ergeben die folgenden Gleichungen:

$$CH = b \cdot \sin(\alpha), \quad HA = b \cdot \cos(\alpha).$$

Da das Dreieck BHC rechtwinklig in H ist, kann man den Satz von Pythagoras ebenfalls in diesem Dreieck anwenden. Man muss folglich den Wert von BH berechnen. Da der Wert von AH bekannt ist, hat man $BH = c - AH = c - b \cdot \cos(\alpha)$. Der Staz von Pythagoras ergeben also

$$\begin{aligned}
a^2 &= CH^2 + BH^2 \\
&= b^2 \cdot \sin(\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 \\
&= b^2(\underbrace{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2}_{=1}) + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Somit ist der Kosinussatz bewiesen. □

Das folgende Beispiel zeigt ein Problem in welchem die Aufgabenstellung einen trigonometrischen Ansatz nahelegen. Wir werden sehen, dass der trigonometrische Beweis nicht kürzer oder eleganter ist als der normale Lösungsweg. Im Gegensatz dazu erscheint die trigonometrische Lösung aber weniger kompliziert.

Beispiel 17 (Finalrunde 2013) *Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck sodass $\angle ABD = \angle ADC$. Sei E die Projektion von A auf BD. Zeige, dass $BC + BE = DE$.*

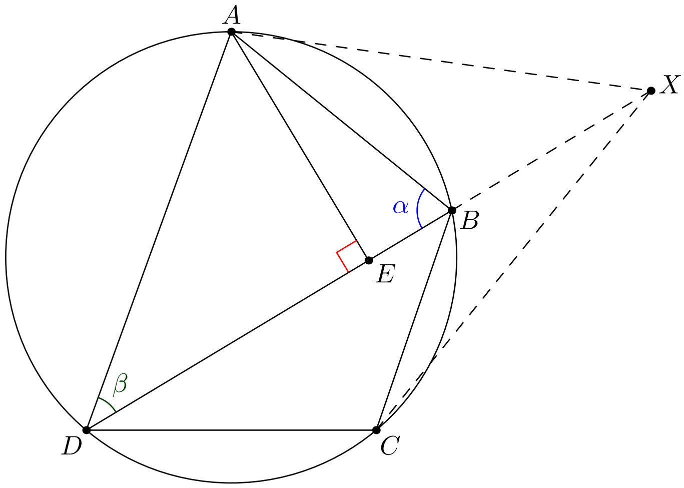


Abbildung 33: SMO 2013/3

Klassische Lösung. Wir beobachten zuerst, dass $\angle DCA = \angle DBA = \angle ADc$. Es gilt somit $AD = AC$. Wie geht es weiter ? Die Konfiguration und die Idee, die damit zusammenhängt, sind ein klassischer Lösungsansatz den man wiederverwenden kann.

Der Kernidee ist, den Punkt E sowie den rechten Winkel gut zu verwenden. Die Distanz DE kommt in dem zu beweisenden Ausdruck vor und wir wissen bereits, dass das Dreieck ADC gleichschenklig in A ist. Indem man diese beiden Ideen kombiniert, wird es interessant den Punkt X auf der Gerade DE sodass E der Mittelpunkt von DX ist. Somit ist das Dreieck ADX gleichschenklig in A und man hat $AD = AC = AX$.

Somit gilt, $\angle AXD = \angle ADX = \angle ACB$. Da $AC = AX$, hat man auch $\angle ACX = \angle AXC$. Daraus folgt $\angle BCX = \angle ACX - \angle ACB = \angle AXC - \angle AXB = \angle BXC$ und somit $BC = BX$.

Somit findet man

$$DE = EX = EB + BX = EB + BC.$$

□

Trigonometrischer Ansatz. Wir versuchen eine Verbindung zwischen gewissen Strecken zu zeigen welche nicht direkt miteinander verbunden waren. Das ist eine typische Situation in der die Trigonometrie helfen kann etwas zu entdecken. Die Strategie ist jede der Strecken BC, BE und DE mithilfe von einigen Parametern. Idealerweise haben verwenden wir genauso viele Parameter wie wir *Freiheitsgrade* in dem Problem haben.

Zum Beispiel, in dem Problem welches wir hier lösen, man fängt an die Punkte A und B zu zeichnen. Der erste Parameter ist also die Distanz AB. Man kann bemerken, dass die Position von A kein Parameter ist, da die Position von A das Problem nur verschiebt. Ebenso ist die Position von B (auf dem Kreis mit Radius AB mit dem Zentrum A) kein Parameter, da man durch eine Rotation der Figur jede Position erreichen kann. Anschliessend kann man den Punkt D auswählen indem man den Winkel $\angle ABD$ und die Distanz BD. Man findet also zwei weitere Parameter. Schliesslich bemerkt man, dass die Position des Punktes C eindeutig bestimmt ist durch den Schnittpunkt des Kreises durch ABD mit der Gerade durch D welche einen Winkeln $\angle ABD$ mit der Gerade AD bildet. Somit hat man genau drei Freiheitsgrade.(Solange wir die Drehungen und Streckungen nicht berücksichtigen.)

Die Distanzen welche uns interessieren sind BC, BE und DE. Eine natürliche Wahl der drei Parameter sind also $\alpha := \angle ABD$, $\beta := \angle ADB$, und die Distanz BD. Die Wahl ist auf diese Art symmetrisch bezüglich der Distanzen BE und DE.

Jetzt drücken wir die die drei Streckenlängen durch unsere drei Parameter aus. Zuerst beobachten wir dass $\angle DCB = 180° - \angle DAB = \alpha + \beta$. In dem Dreieck ABE, rechtwinklig in E, hat man

$$BE = AB \cdot \cos(\alpha).$$

Der Sinussatz in dem Dreieck ABD erlaubt uns die Strecke AB mithilfe der Drei Parametern. Man hat $AB = BD \cdot \sin(\beta)/\sin(\alpha + \beta)$ (Dabei verwendet man $\sin(\angle DAB) = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$). Somit hat man

$$BE = BD \cdot \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

und auf symmetrische Art und Weise

$$DE = BD \cdot \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Jetzt stellen wir noch fest, dass $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = \alpha - \beta$. Der Sinussatz im Dreieck BDC ergibt also

$$BC = BD \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Die Bedingung $BC + BE = DE$ ist somit, nachdem mit den Termen BD und $\sin(\alpha+\beta)$, vereinfacht wurde, erhält man

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

welche man beweisen kann. (Daher ist es wichtig die trigonometrischen Formeln zu kennen) $\square$

Beispiel 18 (wahrscheinlich MEMO) *Zwei Kreise mit den Zentren O_1 und O_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Tangenten in A und schneiden BO_1 und BO_2 jeweils in den Punkten K und L. Zeige dass KL parallel zu O_1O_2 ist.*

klassische Lösung. Wir beginnen mit Winkeljagd Man weiss, dass die zwei Tangenten rechtwinklig an die Radien der beiden Kreise sind. Somit erhält man $\angle KAO_1 = 90° - \angle KAL = \angle LAO_2$. Also

$$\angle KAL = 90° - \angle KAO_1 = 180° - \angle O_1AO_2 = 180° - \angle O_1BO_2,$$

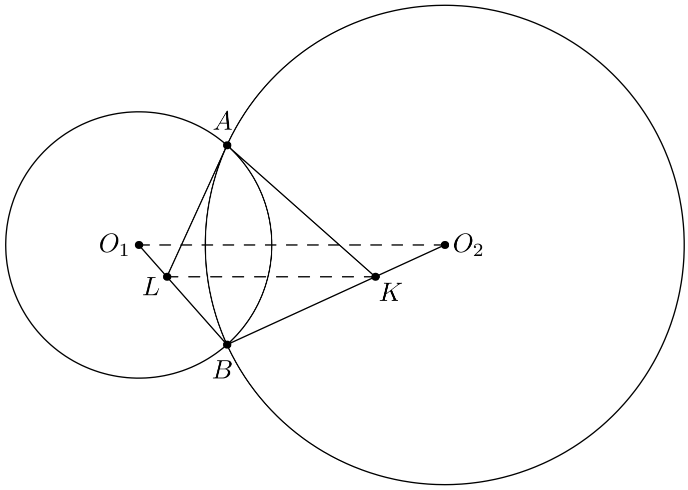


Abbildung 34: $KL \parallel O_1O_2$

wobei man in der letzten Gleichung die Formel $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$ verwendet. (Wie ? durch symmetrie!). Also liegen die Punkte A, K, B und L auf einem Kreis.

Man weiss dass AB rechtwinklig zu O_1O_2 ist. (Das ist eine klassische Eigenschaft der Potenzlinie). Um zu beweisen dass KL parallel zu O_1O_2 ist, reicht es zu beweisen dass KL rechtwinklig zu AB ist. Durch Winkeljagd folgt, dass $\angle KBA = \angle O_1BA = \angle O_1AB$, weil $O_1A = O_1B$. Somit hat man $\angle O_1AB = 90° - \angle BAL = 90° - \angle BKL$ indem man die Tatsache verwendet dass die Punkte A, B, K, L auf einem Punkt liegen. Somit hat man $\angle KBA = 90° - \angle BKL$ und man ist fertig. $\square$

Trigonometrische Lösung. Wie in der vorangehenden Lösung findet man, dass die Punkte A, K, B, L auf einem Kreis liegen. Natürlich hat ein trigonometrischer Beweis immer auch einen Teil der mit Hilfe eines klassischen Ansatz gelöst wird. Es ist immer hilfreich mit einigen klassischen Methoden zu beginnen und zu versuchen einige klassische Eigenschaften herzuleiten.

Um zu beweisen, dass KL und O_1O_2 parallel sind, ist es ausreichend zu zeigen dass $BK/KO_1 = BL/LO_2$. Wir versuchen diese Verhältnisse mit dem Sinussatz zu berechnen. Man beobachtet zuerst dass $BO_1 = AO_1$ und $BO_2 = AO_2$. Diese einfache Beobachtung elaubt uns diese beide Verhälnisse als Bruch der Seitenlängen in den Dreiecken AO_1K und AO_2L. Wir verwenden jetzt den Sinussatz und erhalten

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{AO_1}{KO_1} = \frac{\sin\angle AKO_1}{\sin\angle O_1AK} = \frac{\sin\angle ALO_2}{\sin\angle O_2AL} = \frac{AO_2}{LO_2} = \frac{BO_2}{LO_2}.$$

Wir haben die Tatsache verwendet, dass $\angle O_1AK = \angle O_2AL$ welche wir in den vorangehenden Lösung verwendet wurde, sowie die Tatsache, dass $\angle AKO_1 = 180° - \angle ALO_2$ mit der Identität $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. $\square$

4.5 Das magische Lemma

Wie sein Name schon erwähnt, ist das folgende Lemma trotz seine Naivität ein sehr hilfreiches Werkzeug. Es ist das erste Resultat dass ihr nicht in normalen Einführungen in die Trigonometrie findet. Von jetzt an verwenden wir auch gerichtete Strecken.

Satz 4.3 (Das magische Lemma) *Sei ABC ein Dreieck. Man bezeichne die Seitenlängen mit $b := AC, c := AB$. Sei X ein Punkt auf der Gerade BC (Nicht zwangsläufigerweise die Seite BC) und sei $\alpha_1 := \angle BAX$ und $\alpha_2 := \angle CAX$. Also*

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \cdot \frac{c}{b}.$$

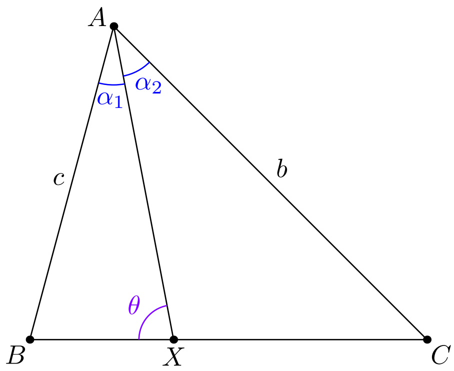


Abbildung 35: Das magisches lemma

Wie kann man das magische Lemma interpretieren ? Der Punkt X ist beliebig auf der Gerade BC. Um seine Position zu beschreiben kann man entweder einen Winkel verwenden : der Wert von α_1 bestimmt eindeutig die Position von X (Man bemerke, dass $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$) oder eine Distanz : Die Distanz BX bestimmt eindeutig die Position von X auf der Seite BC, da $CX = a - BX$. Das magische Lemma gibt somit eine Verbindung zwischen den beiden Ansätzen die den Punkt X charakterisieren. Somit ist das magische Lemma wieder einmal ein Resultat der Trigonometrie welches Distanzen und Winkeln verbindet.

Beweis. Der Beweis beruht speziell auf der Gleichung $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$. Zuerst einmal gilt es zu bemerken, dass $\theta := \angle BXA$. Also $\angle CXA = \pi - \theta$. Der Sinussatz angewendet an den Dreiecken ABX und ACX, ergeben

$$\frac{BX}{\sin(\alpha_1)} = \frac{c}{\sin(\theta)}, \quad \frac{CX}{\sin(\alpha_2)} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{b}{\sin(\theta)}.$$

Indem man diese beiden Verhältnisse dividiert, kürzt sich der Ausdruck $\sin(\theta)$, und man erhält.

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \cdot \frac{c}{b}.$$

wie erwünscht. □

Um die Anwendung des magischen Lemmas zu zeigen fangen wir mit zwei sehr praktischen Theoreme an. Sie können verwendet werden wenn drei Geraden sich in einem Punkt schneiden oder wenn man beweisen muss, dass drei Punkte auf einer Gearde liegen. Auch hier verwendet man gerichtete Strecken und auch die Winkel können negativ sein.

Satz 4.4 (Ceva & Menelaos) *Sei ABC ein Dreieck. Seien E, F und G jeweils Punkte auf der Gerade BC, CA und AB. (Sie müssen nicht auf den Seiten liegen).*

1. (Ceva) *Die Gerade AE, BF und CG schneiden sich genau dann in einem Punkt (oder sie sind parallel), falls eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.*
   - $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$
   - $\frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} = 1.$
2. (Menelaos) *Die Punkte E, F und G sind genau dann auf einer Geraden wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*
   - $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1,$
   - $\frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} = -1.$

Beweis. Wir werden hier nur eine Richtung des Beweises von Ceva demonstrieren, der Rest überlassen wir als Übung. Vermuten wir, dass die Geraden sich in einem Punkt schneiden und beweisen wir die beiden Gleichungen. Indem wir das magische Lemma an dem Dreieck ABC mit dem Punkt G verwendet, erhält man

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{AC}{BC}.$$

Auf ähnliche Art und Weise erhält man

$$\frac{BE}{EC} = \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} \cdot \frac{BC}{AB}.$$

Indem man die drei Gleichungen miteinander multipliziert, erhält man

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA}.$$

Es reicht also zu beweisen dass eines dieser Prudkte gleich eins ist. Sei X der Schnittpunkt der Geraden. Wir verwenden den Sinussatz im Dreieck AXB und erhalten

$$\frac{BX}{AX} = \frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XBA} = \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle FBA}.$$

Auf die gleiche Art erhält man

$$\frac{CX}{BX} = \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle GCB}, \quad \frac{AX}{CX} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle EAC}.$$

Indem man die drei Brüche miteinander multipliziert, erhält man das gewünschte Resultat. □

Das folgende Beispiel wurde ursprünglich an der IMO-Selektion 2014 verwendet. Die Lösung ohne trigonometrische Hilfe ist genug kompliziert sodass das Problem als Schwierigkeit Stufe 2 eingestuft wurde. Wir werden zeigen, dass die trigonometrische Lösung viel direkter ist.

Beispiel 19 (IMO Selektion 2014) *Sei ABC ein Dreieck in welchem $\alpha := \angle BAC$ der kleinste Winkel ist. Sei P ein Punkt auf der Seite BC und D ein Punkt auf der Seite AB sodass B sich zwischen A und D und $\angle BPD = \alpha$. Genau gleich, sei E ein Punkt auf der Seite AC sodass C sich zwischen A und E und $\angle EPC = \alpha$. Zeige, dass die Geraden AP, BE und CD sich genau dann in einem Punkt schneiden falls AP rechtwinklig zu BC ist.*

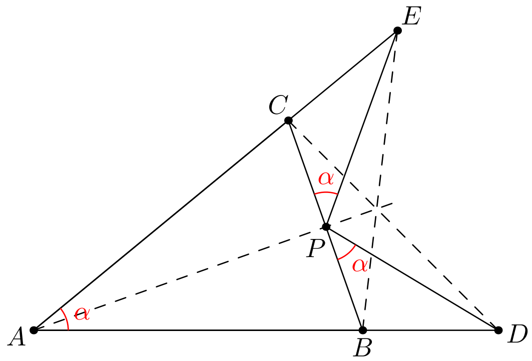


Abbildung 36: IMO-Selektion 2014/5

Lösung. Da wir zeigen wollen, dass sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden, sollte man sofort an den Satz von Ceva denken. Für dies führen wir den Punkt X ein welcher der Schnittpunkt der Geraden AP und ED ist. Wir haben somit dass die Geraden AP, BE und CD sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

$$\frac{AC}{CE} \cdot \frac{EX}{XD} \cdot \frac{DB}{BA} = 1.$$

(Wir wählen hier die Variante von Ceva mit Distanzen anstelle die Variante mit dem Sinus, aber der Beweis funktioniert auch mit den Winkeln.) Die Idee ist, das magische Lemma zu verwenden um die verschiedenen Brüche zu berechnen. Sei $\gamma := \angle APB = \angle CPX$. Also $\angle CPA = \angle XPB = 180° - \gamma$, $\angle XPB = 180° - \gamma - \alpha$ und $\angle XPE = \gamma - \alpha$. Indem man das magische Lemma im Dreieck APD an dem Punkt B verwendet, erhält man

$$\frac{DB}{BA} = \frac{PD}{PA} \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}.$$

Genau gleich, mit den Dreiecken APE und EPD erhält man

$$\frac{AC}{CE} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)},$$
$$\frac{EX}{XD} = \frac{PE}{PD} \cdot \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(180° - \gamma - \alpha)} = \frac{PE}{PD} \cdot \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\gamma + \alpha)}.$$

Indem man die drei Gleichungen miteinander Multipliziert und nach einigen Vereinfachungen erhält man dass die AP, BE und CD sich genau dann in einem Punkt schneiden, falls $\sin(\gamma + \alpha) = \sin(\gamma - \alpha)$. Die Gleichung $\sin(x) = \sin(y)$ hat zwei Familien von Lösungen:

1. $x = y + 2k\pi$,
2. $x = \pi - y + 2k\pi$,

wobei $k \in \mathbb{Z}$. In dem aktuellen Fall, erhält man entweder $\alpha = k\pi$ oder $\gamma = \pi/2 + k\pi$ oder. Da $\alpha > 0$ der kleinste Winkel des Dreiecks ist, ergibt die erste Möglichkeit $\alpha = 0$, was unmöglich ist. Zudem, da $0 < \gamma < \pi$, die erste Möglichkeit wird zu $\gamma = \pi/2$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} AP, BE, CD \text{schneiden sich in einem Punkt} &\iff \sin(\gamma + \alpha) = \sin(\gamma - \alpha) \\ &\iff \gamma = \pi/2 \\ &\iff AP \perp BC. \end{aligned}$$

□

Wir beenden diesen Abschnitt über die Trigonometrie mit einer Anwendung des magischen Lemmas indem wir ein Problem der IMO lösen. Die folgende Lösung wurde von Kaloyan Slavov vorgeschlagen.

Beispiel 20 (IMO 2018) *Sei Γ der Umkreis des spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Punkte D und E befinden sich jeweils auf den Strecken AB und AC, sodass $AD = AE$. Die Mittelsenkrechten von BD und CE schneiden die kleinen Bögen von AB und AC jeweils in den Punkten F und G. Zeigen dass die Geraden DE und FG parallel sind.*

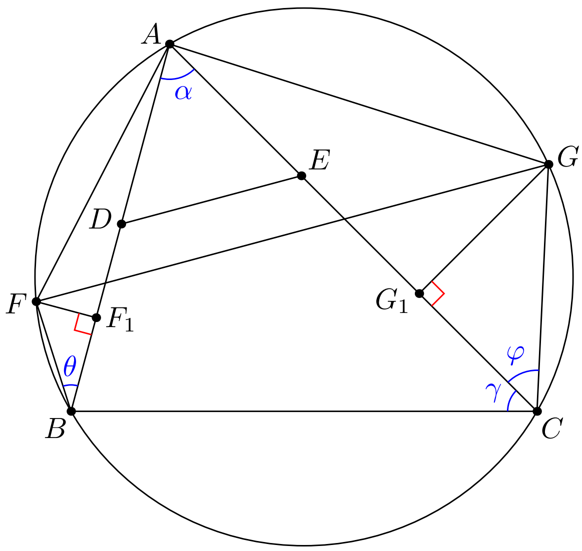


Abbildung 37: IMO 2018/1

Lösung. Seien F_1 und G_1 die Mittelpunkte der Strecken BD und CE. Sei $\alpha = \angle DAE$. Also gilt $\angle ADE = 90° - \alpha/2$, da $AD = AE$. Es reicht also zu zeigen, dass der Winkel zwischen den Geraden und AB und FG $90° - \alpha/2$ ist, damit man schlussfolgern kann dass die Geraden DE und FG parallel sind. Ebenso, falls X der Schnittpunkt von den Geraden AB und FG ist, also ist der Winkel zwischen den Geraden AB und FG gegeben durch

$$\angle AXG = \angle BAF + \angle GFA = \angle BAF + \angle ACG.$$

wir werden also versuchen die Winkel $\angle BAF$ und $\angle ACG$ (oder symmetrisch, die Winkel $\angle ABF$ und $\angle CAG$)

Wir beginne also mit einem schlechten Ansatz. In der Praxis werdet ihr oft Ansätze sehen die keine Ergebnisse liefern. Die Erfahrung wird euch lehren wann ihr einen Ansatz fallen lassen sollt um einen besseren Ansatz zu suchen.

Die Freiheitsgrade der Figur sind gegeben durch die Standardparameter des Dreiecks ABC und dazu noch ein Parameter welcher die Positionen von D und E bestimmt. Sei also $m = AD = AE$. (Wie gewöhnlich hat man $a = BC, b = AC, c = AB$). Wir versuchen also die Winkel $\angle ABF$ und $\angle BAF$ zu berechnen. Die erste Gleichung zwischen den Winkel ist $\angle ABF + \angle BAF = \angle BCA = \gamma$. Das ist eine Konsequenz der Tatsache, dass F sich auf Γ befindet. Die Dreiecke BFF_1 und AFF_1 sind Rechteck in F_1. Man findet also

$$\tan \angle ABF = \frac{FF_1}{BF_1}, \quad \tan \angle BAF = \frac{FF_1}{AF_1}$$

Zudem gilt $F_1B = (c - m)/2$ und $AF_1 = (c + m)/2$. Man beobachtet also eine zweite Gleichung welche die Werte von $\angle ABF$ und $\angle BAF$ mit dem gewählten Parametern verbindet.

$$\frac{c+m}{c-m} = \frac{\tan \angle ABF}{\tan \angle BAF}.$$

Um dieses Problem zu lösen, beginnen wir indem wir die Formel des Tangens für den Winkel $\angle ABF + \angle BAF = \gamma$ verwendet. Man findet also, eine quadratische Gleichung in $\tan \angle ABF$ und $\tan \angle BAF$. Man merkt also, dass die algebraische Lösung kompliziert werden könnte, da man quadratische Gleichung hat.

Also wechseln wir den Ansatz. Ein Grundprinzip der Trigonometrie, welches das Versagen des verwendeten Ansatz erklärt ist folgendes:

> Es ist zu vorteilhafter als Parameter Winkel zu verwenden und die Distanzen durch die Winkel auszudrücken als Distanzen zu verwenden um die winkel auszudrücken.

Wir verwenden also dieses Prinzip um die Aufgabe zu lösen. Wir führen also den Parameter $\theta := \angle ABF$ ein und drücken AD durch θ aus. Indem man die vorangehenden Formel verwendet, findet man

$$\frac{c + AD}{c - AD} = \frac{\tan(\theta)}{\tan(\gamma - \theta)}$$

und somit, nach ein bisschen Algebra und unter Verwendung der Formel $\tan(\alpha)+\tan(\beta) = \sin(\alpha+\beta)/\cos(\alpha)\cos(\beta)$, findet man

$$AD = c \cdot \frac{\tan(\theta) - \tan(\gamma-\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\gamma-\theta)} = c \cdot \frac{\sin(2\theta-\gamma)}{\sin(\gamma)}.$$

Man kann also die Formel $2R = c/\sin(\gamma)$ des Sinussatzes verwenden, wobei R der Radius von Γ ist, um den Ausdruck zu vereinfachen und findet $AD = 2R\sin(2\theta-\gamma)$. Auf ähnliche Art und Weise mit $\varphi := \angle ACG$, hat man

$$AE = 2R\sin(2\varphi - \beta).$$

Da man weiss, dass $AD = AE$, gilt somit $\sin(2\theta-\gamma) = \sin(2\varphi-\beta)$. Der erste Fall der Gleichung ergibt

$$\varphi - \theta = \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \gamma.$$

Somit erhält man wie gewünscht

$$\angle BAF + \angle ACG = (\gamma - \theta) + \varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Der zweite Fall der Gleichung für den Sinus ergibt

$$\theta + \varphi = \frac{\pi+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

In dem Dreieck AFG, kann man berechnen dass (indem man die Tatsache verwendet dass die Punkte B, F, A, G, C sich auf Γ befinden)

$$\alpha \le \angle FAG = 180^\circ - \angle AGF - \angle AFG = 180^\circ - \theta - \varphi$$

und dadurch hätte man $\alpha \le \alpha/2$ was impliziert $\alpha = 0$. Das ist ein Spezialfall welcher unmöglich ist. In diesem Fall gibt es also keine Lösung. □