MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Géométrie II

Arnaud Maret, Daniel Sprecher, Horace Chaix, Marco Cavaleri, Patrick Stalder

Actualisé: 4 février 2022
vers. 3.0.2

Table des matières

1 Triangles semblables et puissance d'un point (P. Stalder, D. Sprecher)

1.1 Triangles semblables

Vous avez probablement appris les théorèmes suivants à l'école. Nous les rappelons ici sans preuves et sans exemples. Vous pouvez encore vous entraîner sur ce chapitre avec les premiers exercices.

Proposition 1.1 (Premier théorème de Thalès) *Soit a et b des droites parallèles et S un point qui ne se trouve sur aucune des droites. Une demi-droite issue de S coupe a en A et b en B. Une deuxième demi-droite coupe a en A' et b en B'. Alors on a les égalités suivantes:*

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SA}{AB} = \frac{SA'}{A'B'}.$$

Proposition 1.2 (Deuxième théorème de Thalès) *Dans la même situation que le théorème précédent, on a aussi:*

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{SA}{SB}.$$

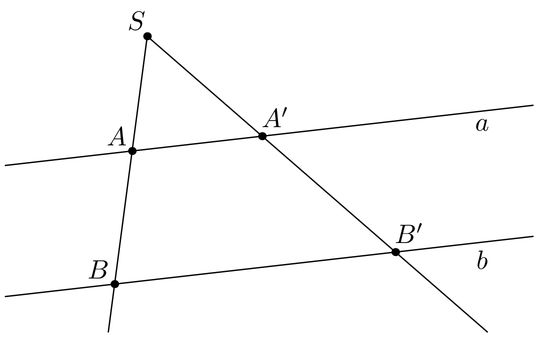


Figure 1 : Théorèmes de Thalès

La réciproque de ce théorème est aussi vraie. Mais pour la fromuler correctement il faut définir des **distances orientées**. Les rapports peuvent alors être négatifs. Soient X, Y et Z trois points différents qui se trouvent dans cet ordre sur une droite. Alors le rapport $\frac{XY}{YZ}$ est positif car les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{YZ}$ pointent dans la même direction. Au contraire $\frac{XZ}{ZY}$ est négatif car ici les vecteurs pointent dans des directions opposées. À chaque fois qu'on parle de produit ou de rapport de distances orientées, on le précisera entre parenthèses.

Proposition 1.3 (Réciproque du premier théorème de Thalès) *Soient a et b deux droites, S, A, B sur a et S, A', B' sur b. Si la condition suivante est vérifiée:*

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} \qquad \textit{(distances orientées)}$$

Alors les droites AA' et BB' sont parallèles.

La réciproque du deuxième théorème n'est pas valable. On peut le voir en construisant le cercle de centre A et de rayon AA'. Ce cercle coupe SB' en un deuxième point $P \neq A'$. On a alors les égalités suivantes:

$$\frac{AP}{BB'} = \frac{SA}{SB}$$

mais les droites AP et BB' ne sont pas parallèles.

Maintenant on peut passer aux **triangles semblables**. Voici d'abord leur définition.

Définition 1.1 (Triangles semblables) Deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont semblables s'ils ont les mêmes angles. On écrit alors $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

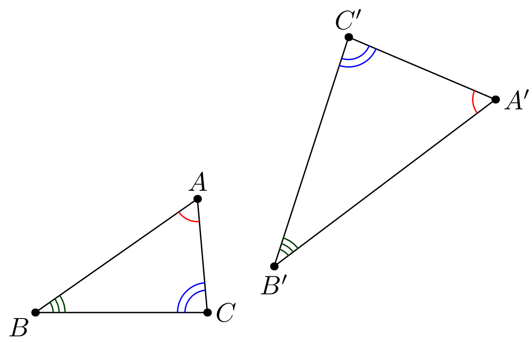


FIGURE 2 : Triangles semblables

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, il suffit de vérifier que deux angles sont les mêmes. Il y a en fait plusieurs façons de montrer que deux triangles sont semblables, ce qui nous amène à la proposition suivante.

Proposition 1.4 (Critères de similitude) *Deux triangles sont semblables si et seulement si*

1. *Les angles sont égaux. (AAA)*
2. *Les rapports des côtés sont égaux. (CCC)*
3. *Un angle et le rapport des côtés adjacents à cet angle sont égaux. (CAC)*

Et c'est déjà toute la théorie. Voici maintenant quelques exemples qui montrent l'utilité des triangles semblables.

Exemple 1 *Dans le carré $ABCD$ soit M le milieu du segment AB. La perpendiculaire à MC passant par M coupe AD en K. Montrer que les triangles CMB et CKM sont semblables.*

Preuve. Pour montrer que les triangles sont semblables, on peut utiliser la chasse aux angles (et montrer que les trois angles respectifs sont égaux). on peut aussi utiliser la

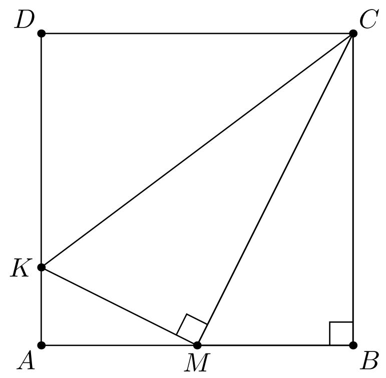


FIGURE 3 : Exemple 1

réciproque de la similarité ce que l'on fait dans cet exemple.
D'après la donnée $\angle MBC = \angle KMC = 90°$. Il faut encore montrer

$$\frac{MK}{MC} = \frac{BM}{BC}.$$

Par chasse aux angles, on trouve que les triangles MBC et KAM sont semblables. Donc

$$\frac{MK}{MC} = \frac{MA}{BC} = \frac{BM}{BC}.$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que M est le point milieu de AB. □

Exemple 2 (Tour final 2016) *Soit ABC un triangle aigu et soit H son orthocentre. Soit G l'intersection de la parallèle à AB passant par H avec la parallèle à AH passant par B. Soit I le point sur la droite GH tel que AC coupe le segment HI en son milieu. Soit J la deuxième intersection de AC avec le cercle circonscrit au triangle CGI. Montrer que $IJ = AH$.*

Solution. Le problème dans cet exercice est qu'on ne connaît rien sur les segments AH et IJ. On a de la peine à les mettre en relation. Pour ce genre d'exercices il faut passer par les angles. Comment résoudre un exercice de ce type? Tout d'abord on trouve un parallélogramme $ABGH$ ce qui réduit l'exercice à prouver $BG = JI$. Cependant, ce n'est pas vraiment utile. Comme toujours quand on ne sait pas comment résoudre un exercice de géométrie, on essaie d'utiliser la chasse aux angles.

Soit A_1 et B_1 les pieds des hauteurs de A et B. On trouve que le quadrilatère BA_1B_1A est inscrit. De plus BG est parallèle à AH et donc $\angle GBC = 90°$. Comme GH est parallèle à BA, $\angle CHG = 90°$. Donc $\angle GBC = \angle GHC$. $GBHC$ est alors un quadrilatère inscrit.

On arrive à la partie la plus compliquée de l'exercice. La donnée nous dis que AC coupe le segment HI en son milieu. Soit P L'intersection de AC et HI. Il faudra utiliser quelque part l'égalité $IP = PH$. Soit A' l'intersection de la droite AC et de la parallèle à IJ passant par H. Comme $\angle IJA' = \angle JA'H$ et $\angle HPA' = \angle IPJ$, les triangles PIJ et

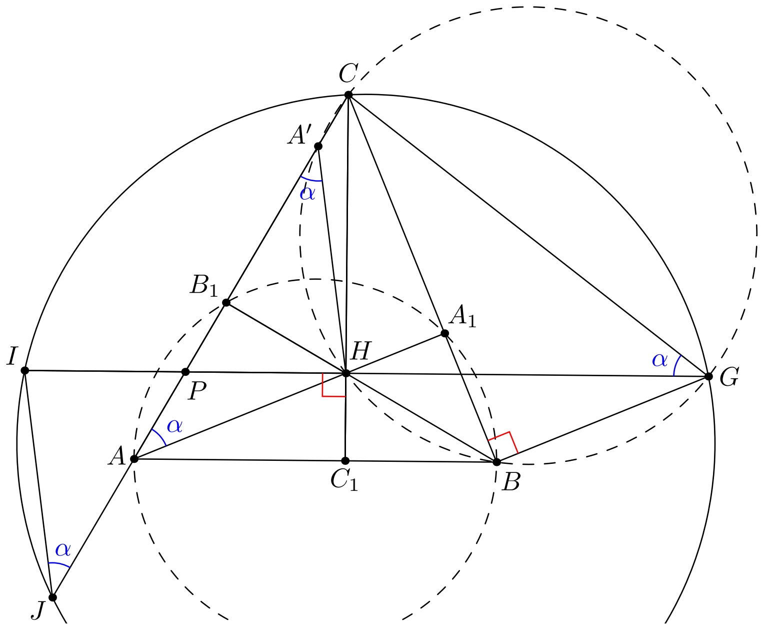


Figure 4 : SMO 2016/8

PHA' semblables. Mais comme $HP = PI$, ils sont mêmes isométriques. On obtient alors l'égalité $A'H = IJ$. Il ne reste plus qu'à montrer que AHA' est un triangle isocèle. Grâce aux triangles semblables obtenus et aux quadrilatères inscrits AA_1B_1B, $CHBG$ et $CGIJ$ on trouve les égalités suivantes :

$$\angle AA'H = 180° - \angle HA'C = \angle CBH = \angle A_1BB_1 = \angle A_1AB_1 = HAA'.$$

Donc HAA' est un triangle isocèle. Et finalement, on trouve $IJ = AH$.

□

Exemple 3 (Sélection IMO 2016) *Soit ABC un triangle non-rectangle avec M le milieu de BC. Soit D un point sur la droite AB tel que $CA = CD$ et soit E un point sur la droite BC tel que $EB = ED$. La parallèle à ED passant par A coupe la droite MD au point I et la droite AM coupe la droite ED au point J. Montrer que les points C, I et J sont alignés.*

Solution. Dans cet exercice il n'y a pas de cercle. On ne peut donc pas faire de la chasse aux angles en passant par les quadrilatères inscrits. Cependant, il existe une solution qui utilise des calculs. La solution la plus élégante utilise les triangles semblables. On définit un point Y comme le point d'intersection de EC et AI. Comme AI est parallèle à DJ, on a les égalités suivantes: $\angle DEC = \angle DEY = \angle CYA$. On a aussi l'égalité: $DC = CA$ ce qui nous donne $\angle CAD = \angle CDA$. Donc $\angle YAB = \angle BDE = \angle EBD = \angle YBA$. On en déduit les égalités:

$$\angle YAC = \angle YAB - \angle CAB = \angle EBD - \angle CDA = 180° - (180° - \angle EBD) - \angle BDC$$

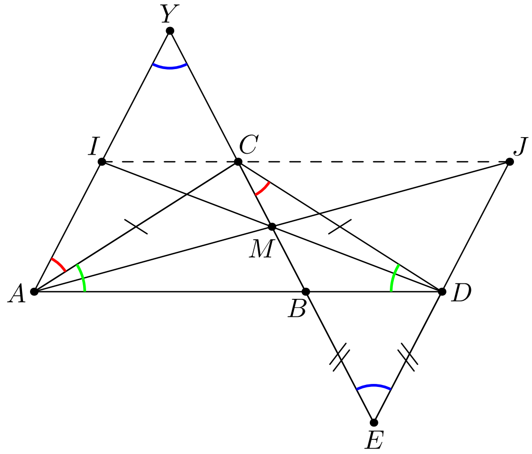


FIGURE 5 : Sélection IMO 2016/10

$$= \angle DBC = \angle DCE$$

Les égalités $\angle AYC = \angle DEC$ et $\angle YAC = \angle DCE$ impliquent que les triangles CYA et DEC sont semblables. Mais comme $CD = CA$, ces deux triangles sont même isométriques. Donc $YC = ED = EB$. Grâce à cela, on en déduit que M est même le milieu du segment YE. Comme ED est parallèle à YI, $\angle YAM = \angle MJE$. Ceci implique que les triangles YAM et EMJ sont semblables et grâce à l'égalité $EM = YM$, ils sont mêmes isométriques. Donc $JM = AM$. Maintenant, on étend les distances YM et EM de telle sorte qu'elles soient égales aux distances MC, respectivement MB. De cette manière, les triangles YAB et EJC sont aussi isométriques. On en déduit alors que JC est parallèle à AD. Comme $\angle IMA = \angle JMD$, les triangles JMD et IMA sont semblables. Mais comme $JM = MA$, ils sont même isométriques. Donc $IM = MD$. Ensuite comme AI est parallèle à JD, et M est le milieu de AJ, M est alors le milieu de DI, car $ADJI$ est un parallélogramme. Comme C se trouve sur la parallèle à AD passant par J, C se touve sur la droite JI, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 4 (IMO 2017) *Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle k tel que le segment RS n'est pas un diamètre de k. Soit l la tangente à k en R. Le point T est tel que S est le milieu du segment RT. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS de k de sorte que le cercle ω circonscrit au triangle JST rencontre l en deux points distincts. Soit A le point commun de ω et k qui est le plus proche de R. La droite AJ recoupe k en K. Prouver que la droite KT est tangente à ω.*

Solution. Dans cet exercice, deux quadrilatères inscrits sont donnés: $AJST$ et $RJSK$. Grâce au working backwards, on réduit le problème à prouver que $\angle KTR = \angle SAT$. Comme les quadrilatères inscrits sont déjà donnés, c'est une bonne idée de commencer par de la chasse aux angles. On trouve :

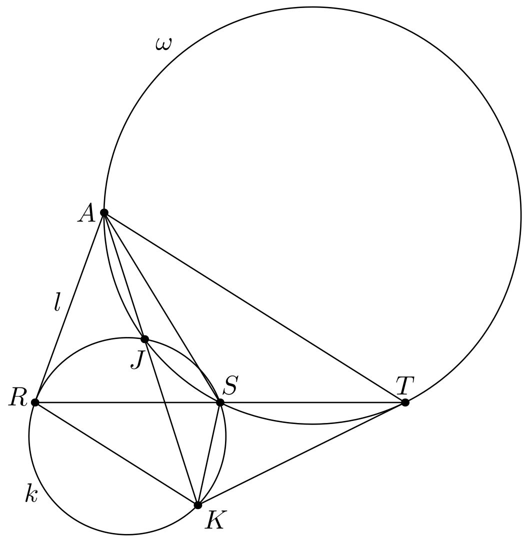


FIGURE 6 : IMO 2017/4

$$\angle RKS = \angle ARS = \angle ART$$
$$\angle RSK = \angle RJK = 180^\circ - \angle AJS = \angle ATS = \angle ATR$$

On en déduit que les triangles RKS et ART sont semblables. On a alors $\angle KRS = \angle STA$. On doit maintenant utiliser d'une certaine manière le fait que $RS = ST$. Le plus simple est d'utiliser les triangles semblables RKS et ART. On trouve l'égalité

$$\frac{RK}{RS} = \frac{TR}{TA}$$

Comme $RS = ST$, on a $\frac{RK}{ST} = \frac{TR}{TA}$ ce qui peut être reformulé par $\frac{RK}{TR} = \frac{ST}{TA}$. Puisque $\angle KRT = \angle STA$, on en déduit par le troisième cas de similarité des triangles que les trianlges KTR et STA sont semblables. Donc $\angle KTR = \angle SAT$, ce qui conclut la preuve.

Dans cet exercice, il est crucial d'utiliser la similarité pour calculer des longueurs de segment.

$\square$

1.2 La puissance d'un point

EUCLIDE a déjà mentionné et prouvé ce théorème important dans son oeuvre *Les éléments.*

Proposition 1.5 (Théorème de la puissance) *Soit un point P donné et un cercle k. Appelons A et B les deux points d'intersection de k avec une droite g quelconque passant par P. On appelle puissance de P par rapport à k le produit $PA \cdot PB$. Ce produit est indépendant du choix de g.*

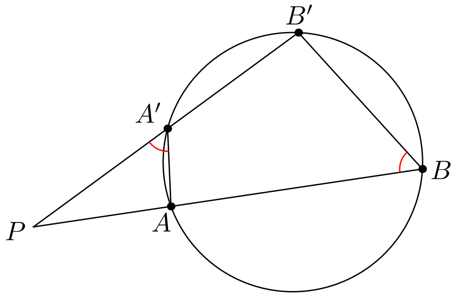


FIGURE 7 : $\triangle PAA' \sim \triangle PB'B$

Preuve. Soient AB et $A'B'$ deux droites arbitraires passant par P qui se trouve en dehors du cercle. Les triangles $\triangle PAA'$ et $\triangle PB'B$ sont semblables, puisque $\angle B'BA = 180° - \angle B'A'A = \angle PA'A$. Il s'ensuit que

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$$

qui est ce que l'on voulait démontrer. Le cas avec P à l'intérieur du cercle se démontre de façon analogue. Les points sur le cercle ont tous une puissance de 0. $\square$

Très souvent on applique le théorème de la puissance avec la tangente au cercle passant par P. Soit T le point où la tangente touche le cercle. On a alors $PA \cdot PB = PT^2$.

Exemple 5 *Soient PA et PB les deux droites tangentes partant d'un point arbitraire P à l'extérieur du cercle k, où A et B sont les points de tangence. Soit C le point d'intersection de la droite parallèle à PB passant par A avec k. Appelons E le deuxième point d'intersection de PC avec k. Montrer que AE coupe le segment PB en deux.*

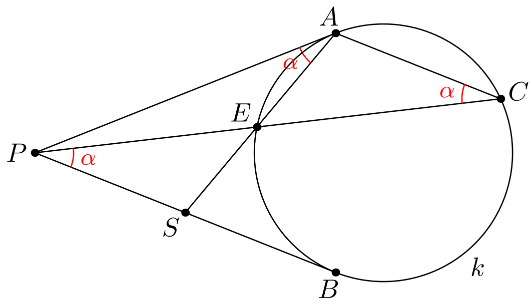


FIGURE 8 : Exemple 5

Solution. Nous allons montrer que $SB^2 = SP^2$. Pour cela nous allons considérer la puissance de S à k. D'après le théorème de la puissance,

$$SB^2 = SE \cdot SA.$$

Pour terminer il nous suffit de montrer que

$$SP^2 = SE \cdot SA \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SP}{SE} = \frac{SA}{SP}.$$

C'est le cas si $\triangle PSE \sim \triangle ASP$, donc si $\angle SPE = \angle PAS$. Pour prouver ceci, on pose $\alpha \doteq \angle SPE$. Comme PB et AC sont parallèles, on a $\angle ACP = \alpha$ et d'après le théorème de l'angle tangent, on a $\angle PAS = \alpha$. $\square$

Comme pour le premier théorème de Thalès, on a une réciproque utile pour le théorème de la puissance. Considérons qu'on a de nouveau affaire à des distances orientées (cf. chapitre 1). Par conséquent, la puissance d'un point à l'intérieur du cercle est négative.

Proposition 1.6 (Réciproque du théorème de la puissance) *Si les droites AB et $A'B'$ se coupent en P et $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ (vues comme distances orientées), alors les points A, B, A', B' se trouvent sur le même cercle.*

1.3 L'axe radical

Soient k_1, k_2 deux cercles autour de M_1, M_2 avec des rayons de r_1, r_2 respectivement. En général la puissance d'un point par rapport à l'un des deux cercles est différente de la puissance par rapport à l'autre cercle. Quel est le lieu géométrique des points possédant la même puissance par rapport aux deux cercles? La réponse est l'axe radical qui est une droite perpendiculaire à M_1M_2. Si les cercles se coupent en deux points, elle passe par ces deux points d'intersection.

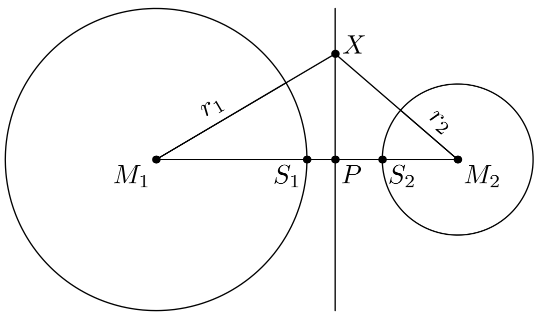


FIGURE 9 : L'axe radical

Preuve. Soient S_1 et S_2 les points d'intersection de k_1, respectivement de k_2 avec la droite M_1M_2 (Fig. 9). Par la continuité de la puissance on trouve un point P sur la droite S_1S_2, qui a la même puissance par rapport aux deux cercles. Or on démontre que tous les points X, situés sur la perpendiculaire M_1M_2 passant par P, ont la même puissance par rapport aux deux cercles. La puissance de P par rapport aux deux cercles vaut

$$\begin{gathered}(PM_1 - r_1)(PM_1 + r_1) = (PM_2 - r_2)(PM_2 + r_2) \\ \Leftrightarrow PM_1^2 - r_1^2 = PM_2^2 - r_2^2 \\ \Leftrightarrow PM_1^2 - r_1^2 + PX^2 = PM_2^2 - r_2^2 + PX^2 \\ \Leftrightarrow XM_1^2 - r_1^2 = XM_2^2 - r_2^2 \\ \Leftrightarrow (XM_1 - r_1)(XM_1 + r_1) = (XM_2 - r_2)(XM_2 + r_2)\end{gathered}$$

Dans la deuxième ligne on a additionné PX^2 aux deux côtés et dans la troisième ligne on a appliqué le théorème de Pythagore aux triangles rectangles $\triangle PXM_1$ et $\triangle PXM_2$. Dans la dernière ligne on retrouve la puissance des points X par rapport aux deux cercles. Notre intuition nous dit qu'il n'y a pas d'autres points avec cette propriété. C'est le cas et, exceptionnellement, on l'accepte sans preuve. □

Si les cercles ne se coupent pas, on construit l'axe radical en dessinant l'une des quatre tangentes communes. L'axe radical passe alors par le milieu du segment qui a comme extrémités les deux points de tangence.

Exemple 6 (Tour final 2009, 7) *Les points A, M_1, M_2 et C se trouvent dans cet ordre-là sur une droite. Soit k_1 le cercle de centre M_1 passant par A et k_2 le cercle de centre M_2 passant par C. Les deux cercles se coupent aux points E et F. Une tangente commune de k_1 et k_2 est tangente à k_1 en B et à k_2 en D. Montrer que les droites AB, CD et EF se coupent en un seul point (Fig. 10).*

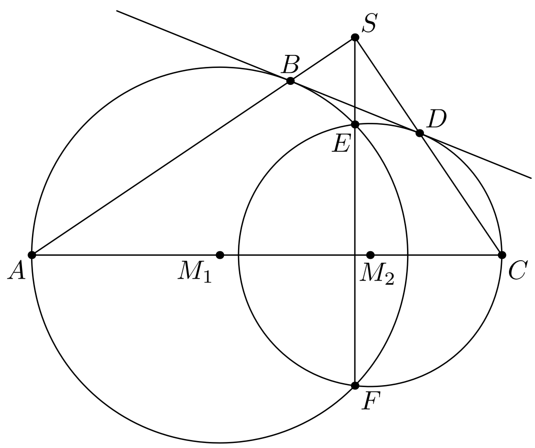


Figure 10 : SMO 2009/7

Démonstration. Nous remarquons en premier lieu que EF est l'axe radical des deux cercles. Il suffit donc de montrer que le point d'intersection S des droites AB et CD a la même puissance par rapport aux deux cercles, donc que $SA \cdot SB = SC \cdot SD$. D'après le théorème de la puissance ceci est équivalent au fait que $ACDB$ est un quadrilatère inscrit. Nous allons donc prouver cette dernière affirmation par une chasse aux angles.

Par le théorème de l'angle au centre, nous avons $\angle CM_1B = 2 \cdot \angle CAB$. Comme les rayons M_1B et M_2D sont tous les deux perpendiculaires à la tangente BD, ils sont donc parallèles et nous avons donc $\angle CM_2D = \angle CM_1B = 2 \cdot \angle CAB$. Le triangle $\triangle M_2CD$ est isocèle, ce qui induit:

$$\angle BDC = 90° + \angle M_2DC = 90° + \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle CM_2D) = 180° - \angle CAB.$$

L'affirmation est donc démontrée. □

L'axe radical peut être très utile pour résoudre des exercices. Voici un petit conseil pour les exercices: Un point peut être vu comme un cercle de rayon 0. Donc pour deux points A et P, la puissance du point P par rapport au cercle dégénéré A sera toujours de PA^2.

2 Configurations classiques (M. Cavaleri)

2.1 Introduction

Ce script est destiné à montrer des configurations classiques qui, une fois reconnues dans des exercices, permettront de vous faire gagner du temps et de ne pas tout réinventer à chaque fois. Avant de voir ces configurations, nous mettons au clair les points particuliers du triangle. Dans ce script, nous travaillerons avec le triangle quelconque $\triangle ABC$. On suppose connues l'existence et la construction des points principaux de triangle (centre du cercle circonscrit O, centre du cercle inscrit I, orthocentre H, centre de gravité G). Si rien n'est précisé, on utilisera $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ et $\gamma = \angle BCA$. On présente ici d'autres points remarquables du triangle : les centres des cercles exinscrits. Les cercles exinscrits sont les cercles tangents aux droites AB, BC et CA mais ne se trouvant pas à l'intérieur de $\triangle ABC$. On définit le cercle A-exinscrit (et similairement les cercles B- et C-exinscrits) comme étant le cercle tangent à AB, BC et CA mais ne se trouvant pas du même côté de BC que A. Le centre d'un tel cercle se construit en intersectant des bissectrices, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2.1 *La bissectrice intérieure de A et les bissectrices extérieures des angles B et C s'intersectent en I_A, le* ***centre du cercle A-exinscrit****. Les centres des cercles B- et C-exinscrits peuvent se construire de façon analogue.*

Démonstration. Soit I_A l'intersection des deux bissectrices extérieures à B et C. Comme I_A est sur la bissectrice extérieure de B, I_A est à la même distance de la droite AB que de la droite BC. Similairement, comme il est aussi sur la bissectrice extérieure de C, I_A est à la même distance de la droite AC que de la droite BC. Ainsi I_A est à même distance de AB que de AC et se trouve donc sur la bissectrice intérieure de A (et non pas extérieure car nous sommes à l'intérieur de l'angle $\angle BAC$). En prenant comme rayon la distance aux droites, on a le cercle A-exinscrit centré en I_A. □

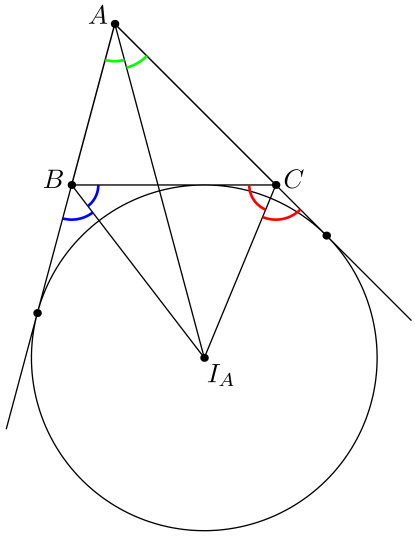


FIGURE 11 : Le cercle A-exinscrit

2.2 Configurations classiques du triangle

Dans cette section, nous verrons les configurations les plus importantes du triangle : le théorème du Pôle Sud, les symétriques de l'orthocentre, le cercle et la droite d'Euler, et des propriétés des cercles inscrits et exinscrits.

2.2.1 Le théorème du Pôle Sud

Proposition 2.2 (Pôle Sud, Incenter/Excenter) *Soit $\triangle ABC$ un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit S la deuxième intersection de AI avec le cercle circonscrit à ABC. Alors, les points I, B, C et I_A sont sur un cercle de diamètre II_A, centré en S, où I_A est le centre du cercle A-exinscrit.*

Démonstration. Montrons d'abord que $SB = SI$. Une chasse aux angles classique nous donne tout d'abord que $\angle SIB = \angle BAI + \angle IBA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. De plus, $\angle ISB = \angle ACB = 180° - \alpha - \beta$. Ainsi, $\angle SBI = 180° - \angle SIB - \angle IBS = 180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) - (180° - \alpha - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, ce qui montre bien que $SB = SI$. Le même raisonnement peut être fait avec SC et donne $SC = SI$, on obtient donc que $SB = SC = SI$. On a déjà que B, C et I sont sur un cercle de centre S. De plus, comme $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90°$, I_A est aussi sur le cercle et il forme un diamètre avec I, ce qui termine la preuve. □

2.2.2 Cercle inscrit et cercle exinscrit

Nous allons maintenant travailler avec une transformation du plan que certains d'entre vous ont déjà vue à l'école : l'homothétie. Une homothétie est définie par la donnée d'un point O et d'un réel λ. L'homothétie de centre O et de rapport λ enverra alors un point P sur un point P' tel que $OP' = \lambda \cdot OP$ (distances orientées). On a donc que P et P' sont du même côté de O si $\lambda > 0$ et que P et P' ne sont pas du même côté de O si $\lambda < 0$.

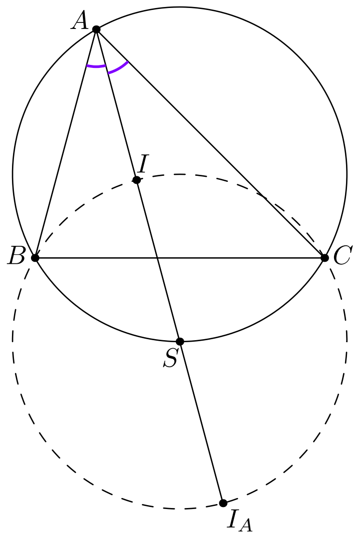


FIGURE 12 : Le théorème du Pôle Sud

Nous utiliserons parfois la notation $\mathcal{H}(P, \lambda)$ pour l'homothétie de centre P et de rapport λ.

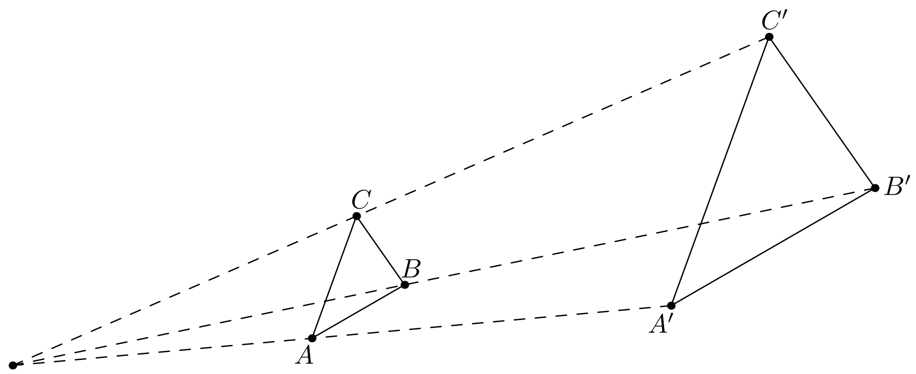


FIGURE 13 : Un exemple d'homothétie

Nous explorons maintenant deux configurations montrant une dualité entre le cercle inscrit et le cercle exinscrit.

Proposition 2.3 (Diamètres des cercles inscrits/exinscrits) *Soit $\triangle ABC$ un triangle, I le centre de son cercle inscrit ω, D le point de contact de ω avec BC, I_A le centre de son cercle A-exinscrit ω_A et X le point de contact de ω_A avec BC. De plus, définissons les points E et Y tels que DE et XY sont des diamètres de ω, respectivement ω_A. Alors (cf. Fig. 14),*

- *A, E et X sont alignés*
- *A, D et Y sont alignés*

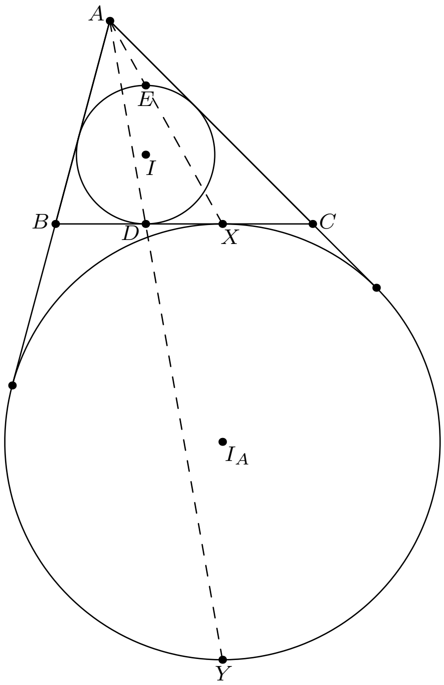


FIGURE 14 : Proposition 2.3

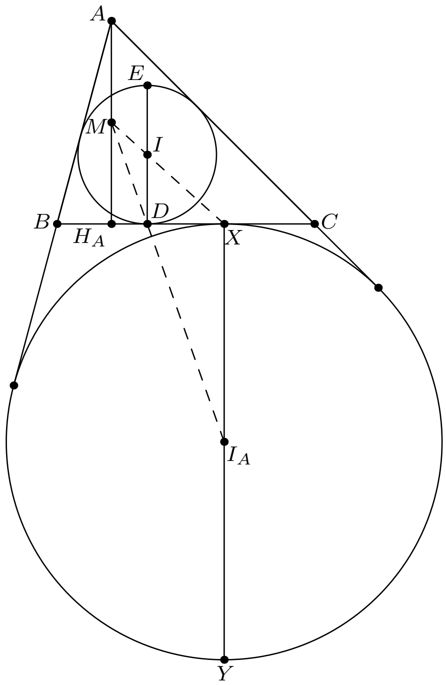


FIGURE 15 : Proposition 2.4

Démonstration. On montre d'abord qu'il existe une homothétie de centre A envoyant ω sur ω_A. Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre A telle que $\mathcal{H}(I) = I_A$. Notons $F = \omega \cap AB$ et $F_A = \omega_A \cap AB$. Comme $\triangle AFI \sim \triangle AF_AI_A$, on a aussi $\mathcal{H}(F) = F_A$. Cela montre que $\mathcal{H}(\omega) = \omega_A$. De plus, comme $ID \parallel I_AX$, on a $\mathcal{H}(ID) = \mathcal{H}(I_AX)$ et donc

$$\mathcal{H}(\{E, D\}) = \mathcal{H}(\omega \cap ID) = \omega_A \cap I_AX = \{X, Y\}$$

Mais comme $\mathcal{H}(D) \neq X$ (car $A \notin DX$), on a $\mathcal{H}(E) = X$ et $\mathcal{H}(D) = Y$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 2.4 (Milieux des hauteurs) *Dans la même configuration que précèdemment, rajoutons H_A le pied de la hauteur issue de A et M le milieu de AH_A. Alors, (cf. Fig. 15)*

- *M, I et X sont alignés*
- *M, D et I_A sont alignés*

Démonstration. On considère maintenant $\mathcal{H}$, l'homothétie envoyant de centre X envoyant E sur A (comme ces points sont alignés par la proposition précédente). Comme $AH_A \parallel ED$, on a aussi $\mathcal{H}(D) = H_A$. Ainsi, le milieu de DE est envoyé sur le milieu de H_AA, montrant que M, I, et X sont alignés. La deuxième affirmation se montre de façon similaire. $\square$

2.2.3 Les symétriques de l'orthocentre

Proposition 2.5 (Les symétriques de l'orthocentre) *Soit $\triangle ABC$ un triangle et H son orthocentre. Soient X le symétrique de H par rapport à BC et Y le symétrique de H par rapport au milieu de BC. Alors, $X, Y \in (ABC)$ et AY est un diamètre du cercle circonscrit.*

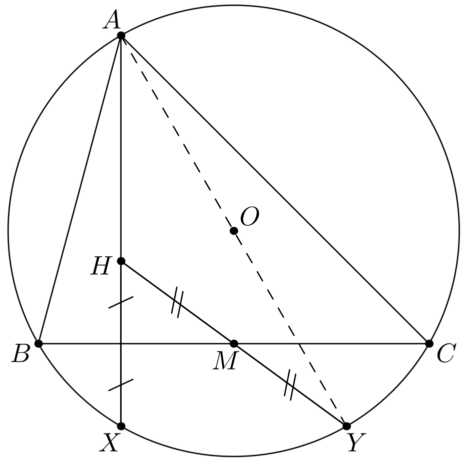


FIGURE 16 : Les symétriques de l'orthocentre

Démonstration. Encore une fois, une simple chasse aux angles suffit. Pour X, nous remarquons d'abord que par symétrie d'axe BC, $\angle BXC = \angle BHC = 180° - \angle CBH - \angle BCH = \beta + \gamma = 180° - \alpha$. Mais alors $\angle BXC + \angle BAC = (180° - \alpha) + \alpha = 180°$, ce qui montre que $X \in (ABC)$. On procède de même par symétrie par rapport au milieu de BC : $\angle BYC = \angle CHB = 180° - \alpha$, ce qui montre que $Y \in (ABC)$. De plus, $\angle ACY = \angle ACB + \angle BCY = \angle ACB + \angle CBH = \gamma + (90° - \gamma) = 90°$, ce qui permet de conclure que AY est bien un diamètre. □

2.2.4 Cercle et droite d'Euler

Proposition 2.6 (Cercle d'Euler (ou des neuf points)) *Soit $\triangle ABC$ un triangle. Alors, il existe un cercle (appelé cercle d'Euler) passant par les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, et les milieux des segments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle. De plus, son rayon est la moitié de celui du cercle circonscrit.*

Démonstration. L'idée est de considérer l'homothétie $\mathcal{H}(H, \frac{1}{2})$ sur le cercle (ABC). Notons ce nouveau cercle Γ. Clairement, $M_{AH}, M_{BH}, M_{CH} \in \Gamma$. Les symétriques de l'orthocentre sur (ABC) nous garantissent que les pieds des hauteurs et les milieux des côtés sont aussi sur Γ. Le rayon a été divisé par deux, ce qui nous permet de conclure. □

Proposition 2.7 (Droite d'Euler) *Soit $\triangle ABC$ un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre et G le centre de son gravité. Alors, O, H et G sont sur une droite, appelée la droite d'Euler.*

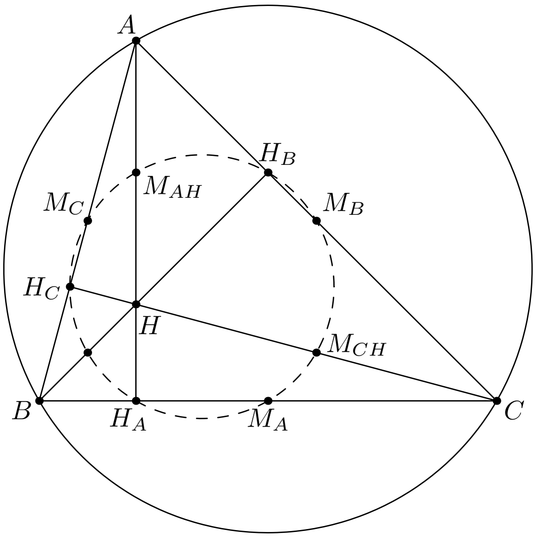


FIGURE 17 : Le cercle d'Euler

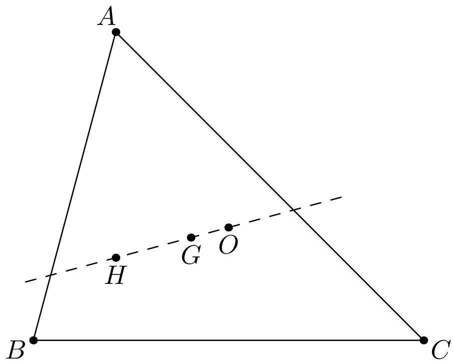


FIGURE 18 : La droite d'Euler

Démonstration. Considérer l'homothétie $\mathcal{H}(G, -2)$. On peut observer que cette homothétie envoie les médiatrices du triangles sur ses hauteurs, et ainsi envoie O sur H. Ainsi, O, H et G sont alignés. □

3 Le plan comme vous ne l'avez jamais vu et Working Backwards (H. Chaix)

3.1 Working Backwards

Working Backwards est une stratégie importante que l'on utilise souvent quand on ne peut pas continuer avec de la chasse aux angles. Comme certaines preuves de ce cours utilisent cette méthode (par exemple le théorème des quadrilatères inscrits, Théorème 4.2 de la géométrie I), elle sera présentée ici un seul exemple typique. L'idée du working backwards est la suivante:

Supposons qu'un point P satisfasse un certain nombre d'hypothèses H et que l'on doive montrer qu'il satisfait alors la conclusion C. L'approche, en deux points, est la suivante:

1. on montre, par construction, qu'il existe un point P' qui satisfasse à la fois H et C,
2. on démontre qu'il existe un unique point qui puisse satisfaire l'hypothèse H.

Alors, de l'unicité garantie par la deuxième étape, on doit nécessairement avoir $P = P'$ et donc, comme P' satisfait C, P satisfait également C et on a terminé. **Une preuve par Working Backwards doit donc toujours contenir ces deux étapes pour être complète.** Voyons tout de suite un exemple pour illustrer cette abstraction logique.

Exemple 7 *Soient ABC et $AB'C'$ deux triangles semblables dans le même ordre et un sommet commun A. Montrer que A, B, C et le point d'intersection des droites BB' et CC' se trouvent sur un cercle.*

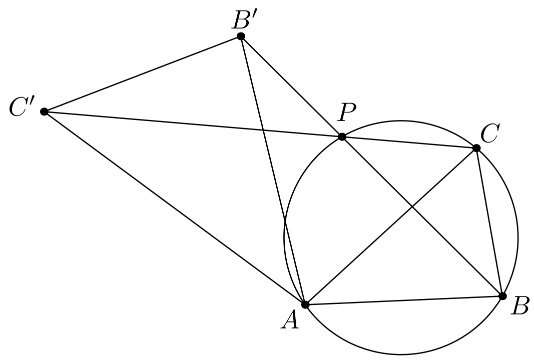


FIGURE 19 : Exemple 7

Solution. On appelle P le point d'intersection de BB' et CC' et les angles des triangles α, β et γ comme d'habitude. Le but est de montrer que P se trouve sur le cercle circonscrit de ABC. Une seule chasse aux angles ne nous apporte rien. Comme il a une similitude qui envoie les points BC sur les points $B'C'$, si P appartient au cercle circonsrcit au triangle ABC, il doit nécessairement appartenir au cercle circonscrit du triangle $AB'C'$. Cela nous donne l'intuition de définir P' comme le point d'intersection des deux cercles. On a fini si on arrive à montrer que B, P', B' et C, P', C' sont chacun sur une droite. On aura alors que P' est le point d'intersection des droites BB' et CC' ce quei signifiera que $P = P'$.
On montre que B, P' et B' sont collinéaires par chasse aux angles:

$$\begin{aligned}\angle BP'B' &= \angle BP'A + \angle AP'C' + \angle C'P'B' \\ &= \angle BCA + \angle AB'C' + \angle C'AB' \\ &= \gamma + \beta + \alpha \\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Comme il y a aussi une similitude entre les points B, B' et C, C', on a aussi montré que C, P', C'. $\square$

Pour conclure ce chapitre, nous faisons deux remarques. Ce que nous pouvons observer dans ces exemples reste très général. Quand le problème traite d'angles, les points sur un cercle sont beaucoup plus pratiques que les points définis avec des droites. Le working backwards nous permet d'utiliser les méthodes de chasse aux angles sur les cercles.
La deuxième remarque concerne la justification par symmétrie qu'on a utilisé dans le deuxième exercice. Quand vous écrivez '... par symétrie, on voit que...', il faut aussi préciser entre quels objets, on a une symétrie. C'est souvent oublié. Il y a une similitude entre les points B, B' et C, C' signifie qu'on peut échanger B et B' et C et C' mais que l'ordre est important.

3.2 Symétries Axiales

Le but de cette section est de présenter les transformation du plan euclidien les plus utiles aux olympiades. Nous supposerons que le lecteur est déjà familier avec celles-ci et nous nous concentrerons donc sur les exemples. Une source utile provient du travail[1] de Li Kin Y. que l'on référencera [LK08].

Les symétries axiales sont assez utiles aux olympiades. Très souvent, symétriser une figure apporte aussi en lisibilité. Pour rappel :

Une symétrie d'axe d envoie	**sur**
Une droite l	Une droite l' s'intersectant avec l sur d.
Un point P	Un point P' avec $PP' \perp d$
Un segment	Un segment de même longueur
Un triangle	Un triangle égal
Un cercle Ω	Un cercle Ω' avec d droite de puissance de Ω et Ω'

Voici un exemple tiré de l'IMO 1985 avec une solution de [LK08]

Exemple 8 (IMO 1985) *Un cercle ω de centre O passe par les sommets A et C du triangle ABC et coupe les cotés AB et BC en K, resp. N. Les cercles circonscrits Ω et ω' d'ABC resp. de KBN s'intersectent en B et M, voire figure 12. Montrer que $\angle OMB = 90°$.*

En dessinant plusieurs fois la figure, on peut conjecturer que MO est la bissectrice de KMC. Dès lors il devient intéressant de considérer un symmétrisation par rapport à MO. Voici comment cette démonstration s'y prend :

Solution. Soit L la perpendiculaire à MB passant par O. On considère K' et C' les symmétriques de K et C par L. On procèdera en trois parties :

1. Comme lemme préliminaire, on démontrera que KK', CC' et MB sont parallèles et perpendiculaires à L.

[1] Li Kin Y., *Geometric Transformation I.* Mathematical Excalibur, HKUST, 2008.

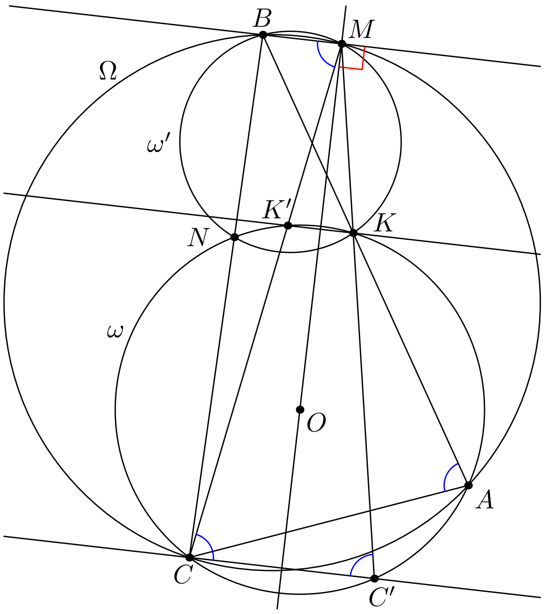


Figure 20 : IMO 1985/5

2. On montre que C', K et M sont sur une droite.
3. On montre que K', C et M sont sur une droite.

On notera que les deux derniers points suffisent à terminer la démonstration : $C'K$ et CK' étant symmétriques par rapport à L, elles s'intersectent sur L et ainsi M est sur L.
Pour le premier point, K' resp. C' étant le symmétrique de K resp. C par rapport à L, on a que KK' et CC' sont perpendiculaires à L. Comme MB est aussi perpendiculaire à L, MB, CC' et KK' sont perpendiculaires à M et parallèle entre elles.
Pour le deuxième point, en utilisant le théorème de l'angle inscrit (et que C' et K' sont sur ω) dans ω et ω'

$$\angle KC'C = 180° - \angle KNC = \angle BNK = \angle BMK$$

Cette égalité et le parallélisme de CC' et BM nous donne que C', K et M sont sur une droite.
Pour le dernier point, en utilisant la symmétrie, le théorème de l'angle inscrit dans ω et ω' ainsi que le parallélisme de BM et CC'

$$\begin{aligned}\angle C'CK' &= \angle CC'K \\ &= \angle CAK \\ &= \angle CAB \\ &= \angle 180° - BMC \\ &= \angle C'CM.\end{aligned}$$

Donc K', C et M sont sur une droite. □

3.3 Rotation et Symétries Centrales

À nouveau, nous procéderons principalement par exemples. Pour rappel :

Une symétrie de centre O envoie	**sur**
Une droite l	Une droite l' parallèle à l
Un Point P	Un Point P' avec O milieu de PP'
Un segment	Un segment parallèle de même longueur
Un triangle	Un triangle égal
Un cercle Ω	Un cercle Ω'
Une rotation en O d'angle θ envoie	**sur**
Une droite l	Une droite l' avec $\angle ll' = \theta$
Un point	Un point
Un segment	Un segment de même longueur
Un triangle	Un triangle égal
Un cercle Ω	Un cercle Ω'

Nous ne traiterons pas la symétrie centrale de façon distincte, s'agissant uniquement d'une rotation de 180°. Là encore, un exercice de [LK08].

Exemple 9 *Soit $ABCD$ un carré de coté 1. Les points P, Q, M, N sont sur les cotés AB, BC, CD resp. DA, tel que*

$$AP + AN + CQ + CM = 2.$$

Montrer que PM est perpendiculaire à QN.

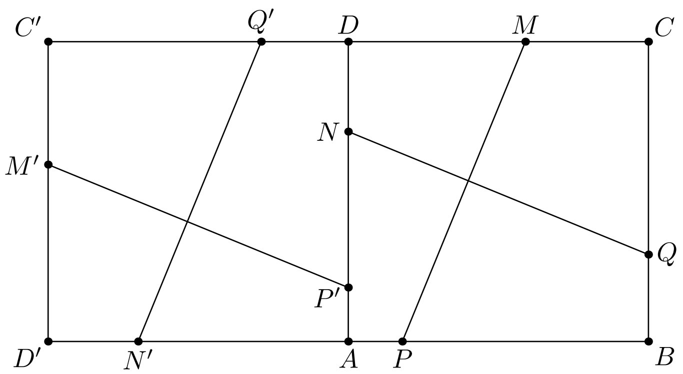


FIGURE 21 : Exemple 9

Solution. On considére la rotation d'angle 90° de centre A qui envoie B sur D, ainsi que P, Q, M, N, C, D sur des points que nous appelerons P', Q', M', N', C' resp. D'.

Comme CC' est parallèle à BD' et que

$$\begin{aligned} PN' &= PA + AN' \\ &= AP + AN \\ &= 2 - (CM + CQ) \\ &= CC' - (CM + C'Q') \\ &= MQ', \end{aligned}$$

on a que $MPN'Q'$ est un parallélogramme. Donc $N'Q'$ est parallèle à MP et ainsi (en faisant une rotation inverse de 90°) NQ est perpendiculaire à MP. □

De façon général, l'idée de démultiplier un carré, soit en faisant de nombreuses symétries par les cotés, soit en élargissant ce carré en un pavage du plan peux parfois aider, même en combinatoire. On citera en exemple l'exercice 6 de sélection IMO de 2013.

3.4 Translation

Avant de commencer, un bref rappel:

Une translation de $\vec{v}$ envoie	**sur**
Une droite l	Une droite l' parallèle à l
Un point P	Un point P' avec $\vec{PP'} = \vec{v}$
Un segment	Un segment parallèle de même longueur
Un triangle	Un triangle semblable
Un cercle Ω	Un cercle Ω'

Lorsque l'on se trouve face à des droites parallèles et des trapèzes, utiliser la translation peut s'avérer aussi utile que les vecteurs. Une idée très souvent utilisée consiste à compléter les triangles en des parallélogrammes.

Exemple 10 (BxMO 2018) *Soit ABC un triangle dont H est l'orthocentre, et soient D, E et F les milieux respectifs des segments AB, AC et AH. Les symétriques de B et C par rapport à F sont P et Q, respectivement. Montrer que les droites PE et QD se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.*

Solution. Soit A' l'image de A par translation de vecteur $\vec{QB}$. On note que cette translation envoie Q sur B et, par le fait que $PCBQ$ est un parallélogramme par construction, P sur C. Nous avons donc une symmétrie centrale en F qui envoie CHB sur QAP, puis QAP sur $BA'C$. Ainsi, en utilisant successivement ce fait, la somme des angle dans BCH, le fait que H est la hauteur, et la somme des angles dans ABC:

$$\begin{aligned} \angle BA'C &= \angle CHB \\ &= 180° - \angle CBH - \angle HCB \\ &= 180° - (90° - \angle BCA) - (90° - \angle CBA) \\ &= 180° - \angle BAC. \end{aligned}$$

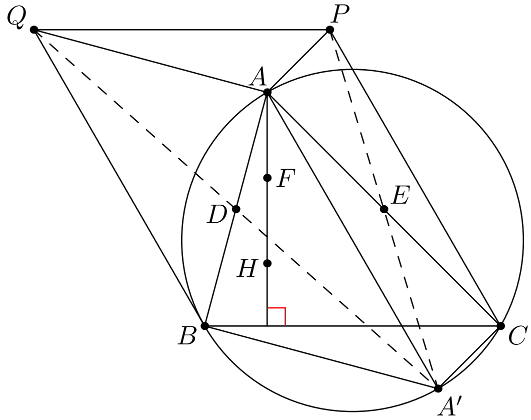


FIGURE 22 : Exemple 10

Par conséquent A' est sur le cercle circonscrit de ABC. Par construction $AQBA'$ et $PAA'C$ sont des parallélogrammes, donc D et E sont leur centres et on a que l'intersection de PE et QD est A', ce qui termine la démonstration. $\square$

Un autre exemple pour la route, directement tiré de [LK08]:

Exemple 11 *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $AD = BC$. Soient E, F les milieux respectifs des segments CD et AB. On pose H, resp. G les intesections de AD et FE, resp. BC et FE. Montrer que $\angle AHF = \angle BGF$.*

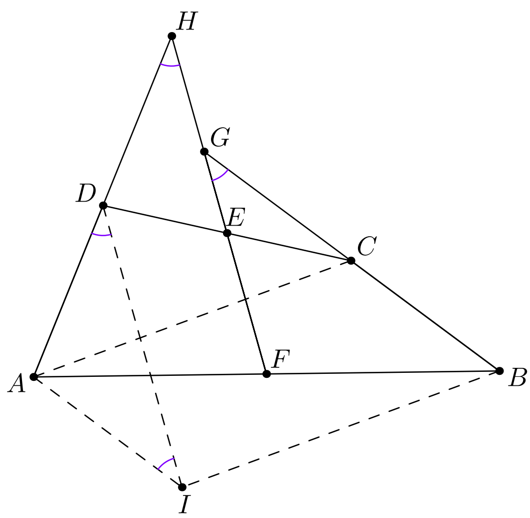


FIGURE 23 : Exemple 11

Solution. Soit I l'image de A par la translation de vecteur $\vec{CB}$. Ainsi $BCAI$ est un parallélogramme. F étant le milieu de BA, il est aussi celui de CI. E et F étant des milieux de cotés consécutifs du triangle IDC, on a que EF est parallèle à DI. En combinant ce fait au parallélisme de CB et AI, on obtient $\angle BGF = \angle AID$. Or, par $AI = BC = AD$, on a que DAI est isocèle, donc $\angle ADI = \angle AID$. Du parallélisme de FH et DI, on conclu que:

$$\angle AHF = \angle ADI = \angle AID = \angle BGF.$$

□

3.5 Homothétie

Pour rappel:

Une homothétie en O de rapport λ envoie	**sur**
Une droite l	Une droite l' parallèle à l
Un point P	Un point P' avec $\vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$
Un segment de longueur s	Un segment parallèle de longueur $\lvert\lambda\rvert s$
Un triangle	Un triangle semblable
Un cercle de rayon r	Un cercle de rayon $\lvert\lambda\rvert r$

On a aussi le résultat suivant:

Proposition 3.1 (Homothétie pour les triangles semblables) *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables tels que $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ et $AC \parallel A'C'$. Alors les droites AA', BB' et CC' se coupent en un point, ou sont parallèles (point à l'infini).*

Exemple 12 (MEMO 2018) *Soit ABC un triangle aigu avec $AB < AC$ et soit D le pied de la hauteur passant par A. Soient R et Q le centre de gravité du traingle ABD respectivement ACD. Soit P un point sur le segment BC tel que $P \neq D$ et que les points P, Q, R et D sont cocycliques. Montrer que les droites AP, BQ et CR se coupent en un point.*

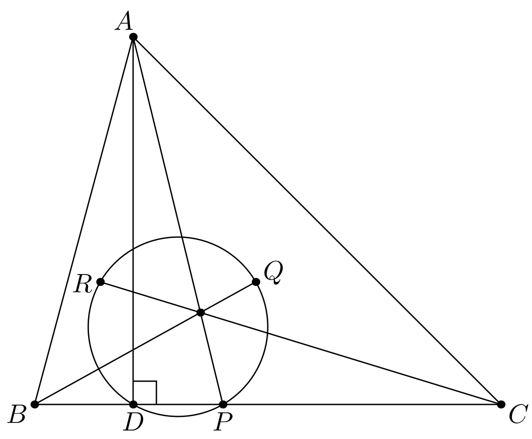


FIGURE 24 : Exemple 12

Solution. Si on arrive à montrer que PQR et ABC sont semblables, que $AB \parallel PQ$ et que $BC \parallel QR$, il y a une homothétie qui envoie PQR sur ABC et donc AP, BQ et

CR se coupent en un point. On peut utiliser le working backwards pour simplifier cet exercice. Pour cela, il faut utiliser d'une certaine manière le fait que R et Q sont des centres de gravité des triangles. On étend la droite DR et on nomme M l'intersection de DR et AB. De la même manière, on nomme N l'intersection de DQ et AC. Comme R et Q sont les centres de gravité des triangles, on a $\frac{DR}{RM} = \frac{DQ}{QN} = \frac{1}{2}$. On en déduit que les droites MN et QR sont parallèles. Mais comme M et N sont les milieux des segments AB respectivement AC, CB est parallèle à MN et donc aussi à RQ. On peut déduire la similarité des triangles PQR et ABC par chasse aux angles. C'est laissé au lecteur comme exercice. $\square$

Exemple 13 *Soit ABC un triangle, M le milieu du segment BC et D un point sur la droite AB de sorte que B se trouve entre A et D. Soit E un point de l'autre côté de B de la droite CD tel que $\angle EDC = \angle ACB$ et $\angle DCE = \angle BAC$. Soit F l'intersection de CE avec la parallèle à DE passant par A et soit Z l'intersection de AE et DF. Montrer que les droites AC, BF et MZ se coupent en un point.*

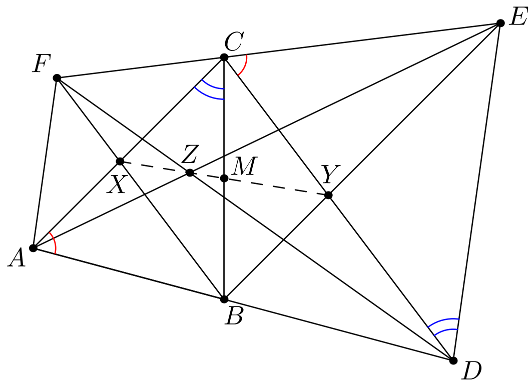


FIGURE 25 : Exemple 13

Solution. On commence par ajouter deux points utiles à la résolution. Soit X l'intersection de AC et BF et soit Y l'intersection de BE et CD. Comme $\angle EDC = \angle ACB$ et $\angle DCE = \angle BAC$, les triangles ABC et CDE sont semblables. On a alors

$$180° - \angle CBD = 180° - \angle BAC - \angle BCA = \angle DEC.$$

Donc $CBDE$ est un quadrilatère inscrit. Ensuite, la condition AF parallèle à DE implique:

$$\angle AFC = 180° - \angle DEF = \angle DBC = 180° - \angle CBA.$$

Donc $BCFA$ est aussi un quadrilatère inscrit. On trouve alors que $\angle FCA = \angle FBA$ et que

$$\begin{aligned}
\angle BED &= \angle BCD \\
&= 180° - \angle BCA - \angle ACF - \angle DCE \\
&= 180° - \angle BCA - \angle ABF - \angle BAC \\
&= \angle FBC.
\end{aligned}$$

On en déduit que FB et DC sont parallèles. Donc $\angle BEA = \angle DEA - \angle DEB = \angle FAE - \angle FAC = \angle CAE$. On remarque alors que les droites CA et BE sont aussi parallèles. Donc $XBYC$ est un parallélogramme ce qui implique que M se trouve sur XY. Comme FAX et DEY sont des triangles semblables qui ont leurs côtés respectivement parallèles. Il existe donc une homothétie qui envoie l'un des triangles sur l'autre. Le centre de l'homothétie est l'intersection de AE, FD et XY. C'est Z. Donc Z se trouve sur la droite XY ce qui implique que les droites AC, BF et MZ se coupent en X. □

Exemple 14 (St. Petersburg Math Olympiad 1996) *Dans ABC, $\angle BAC = 60°$. Soit O un point dans ABC tel que $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$. Soient D et E les milieux respectifs des segments AB et AC. Montrer que A, D, O, E sont sur un cercle.*

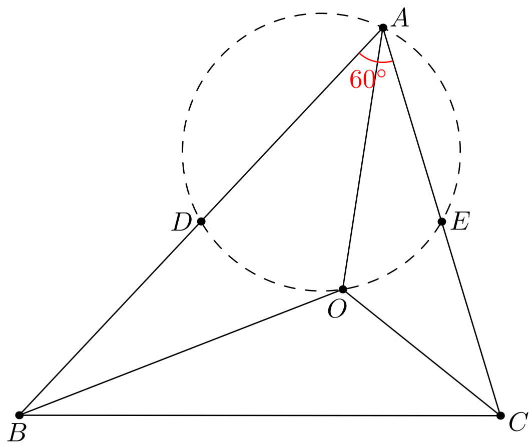


FIGURE 26 : Exemple 14

Solution [LK08]. De

$$\begin{aligned}\angle OAB &= \angle CAB - \angle CAO \\ &= 60° - \angle CAO \\ &= 180° - 120° - \angle CAO \\ &= 180° - \angle AOC - \angle CAO \\ &= \angle OCA,\end{aligned}$$

et $\angle AOC = \angle BOC = 120°$ on à la similitude de OAB et OCA. Dès lors, il devient particulièrement intéressant de trouver une transformation du plan qui envoie OAB sur OCA. Cela peut être obtenu en composant une rotation de 180° avec une homothétie. Appelons φ cette composition. Celle-ci envoie donc $A \mapsto B$, $C \mapsto A$, $O \mapsto O$ et $E \mapsto D$. Ainsi

$$\begin{aligned}\angle OEA + \angle ADO &= \angle \varphi(O)\varphi(E)\varphi(A) + \angle ADO \\ &= \angle ODB + \angle ADO \\ &= 180°,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Chercher à envoyer un triangle sur un triangle semblable par une composition d'homothétie et d'isométrie est un procédé assez simple, mais qui peut s'avérer très puissant. En exemple, on pourrait ainsi mettre l'exercice 5 de la compétition en équipe de la MEMO 2014, laissé en exercice.

4 Premiers pas en trigonométrie (A. Maret)

4.1 Introduction

Les fonctions trigonométriques fournissent un lien algébrique direct entre les mesures d'angles et les mesures de longueurs. *A contrario*, la théorie des triangles semblables ne fournit qu'un critère de comparaison indirect. À savoir: pour montrer que les angles de deux triangles sont égaux, il est suffisant de vérifier que les longueurs de leurs côtés satisfont une certaine relation algébrique. La trigonométrie va nous permettre de calculer directement la valeurs des angles à partir de la longueur des côtés (et *vice versa*). Pour vérifier si les angles sont égaux, il suffira alors de comparer ces valeurs. Dans le contexte des olympiades, la trigonométrique est un outil puissant et dangereux à la fois. Se lancer aveuglément dans une approche par trigonométrie est fortement déconseillé. Le manque d'expérience se traduit souvent par des pages entières d'expressions trigonométriques ne menant absolument nulle part. Seules la pratique et une bonne connaissance des formules trigonométriques permettent de mettre à profit la puissance de la trigonométrie. Il est ainsi fortement conseillé d'entrainer assidument la résolution de problèmes par trigonométrie avant se lancer lors d'un examen. La première section de ces notes fournit un rappel des définitions des fonctions trigonométriques ainsi que leurs propriétés élémentaires. Ce matériel est généralement enseigné dans le cadre scolaire et il est rappelé ici pour référence et par soucis de concision.

4.2 Construction du sinus, du cosinus et de la tangente

Une remarque préliminaire s'impose. Il faut faire attention à ne pas confondre un angle et sa mesure. Ce sont deux objets différents, à l'image d'un segment et sa longueur. Un angle est la portion du plan délimité par deux demi-droites de même origine. La mesure d'un angle est un nombre réel qui détermine la portion du plan qu'occupe l'angle.

Il existe trois fonctions trigonométriques fondamentales qui associent à la mesure d'un angle un nombre réel. Dans la littérature, il est de coutume de travailler en radians plutôt qu'en degrés. L'échelle radian associe à un angle complet (i.e. un angle de 360°) une mesure de 2π. La mesure des autres angles est obtenue proportionnellement. Par exemple, un angle de 180° a une mesure de π radians et un angle droit a une mesure de $\pi/2$ radians. Plus généralement, si d est la mesure d'un angle en degrés et r la mesure du même angle en radians, alors on a la relation suivante:

$$d = \frac{180}{\pi} \cdot r \iff r = \frac{\pi}{180} \cdot d.$$

On décrit à présent la manière de calculer le sinus et le cosinus d'un nombre réel θ. On commence par dessiner le cercle Γ de **rayon 1** centré à l'origine d'un repère d'axes. On reporte ensuite la valeur θ à partir du demi-axe horizontal positif en tournant dans **le sens inverse des aiguilles d'une montre** si $\theta > 0$ et **dans le sens des aiguilles d'une montre** si $\theta < 0$. Il faut s'imaginer une aiguille fixée à l'origine que l'on tourne progressivement jusqu'à ce que l'aiguille détermine un angle de θ **radians** avec le demi-axe horizontal positif. L'aiguille indique alors un point bien déterminé $X(\theta)$ sur le cercle Γ comme illustré par la figure 6. Par exemple, $X(0) = (1; 0)$ et $X(\pi/2) = (0; 1)$.

Comme un tour complet représente un angle de 2π, deux valeurs distinctes de θ peuvent déterminer le même point X sur Γ. C'est le cas si les deux valeurs de θ sont "congruentes modulo 2π", c'est-à-dire, si les deux valeurs sont égales à un certain nombre de tours complets près. Par exemple, les valeurs $\theta_1 = \pi/4$ et $\theta_2 = -2\pi + \pi/4$ déterminent le même point $X(\theta)$ sur Γ.

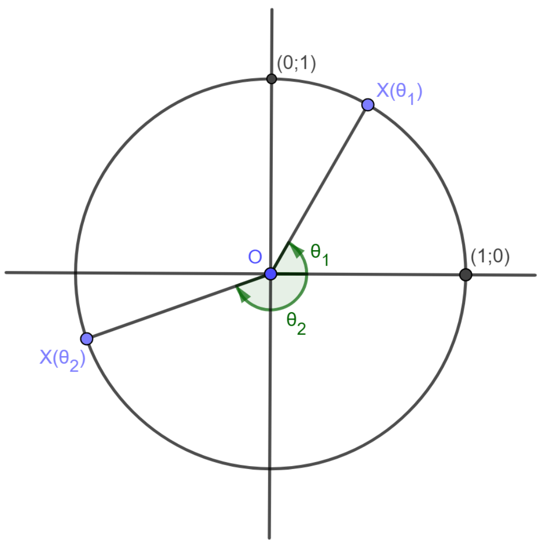


FIGURE 27 : Les points $X(\theta_1)$ et $X(\theta_2)$ déterminés pour les valeurs de $\theta_1 \approx \pi/3$ et $\theta_2 \approx -7\pi/8$.

Définition 4.1 (sinus et cosinus) Le sinus de θ est défini comme l'abscisse du point $X(\theta)$ et le sinus de θ comme l'ordonnée du point $X(\theta)$. C'est-à-dire,

$$X(\theta) = (\cos(\theta); \sin(\theta)).$$

En d'autres termes, le sinus et le cosinus sont définis de la manière suivante. On projette le point $X = X(\theta)$ sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical. Soient H et V les projetés, respectivement. Le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, est alors donné par **la distance signée** OH et le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, par **la distance signée** OV (cf. figure 7). Qu'entend-on par distance signée ? Les points H et V se trouvent sur les deux axes. On compte donc la distance OH positivement si H est à droite de l'origine et négativement si H se trouve à gauche de l'origine. De même, OV est comptée positivement si V est au-dessus de l'origine et négativement si V est au-dessous de l'origine.

Pour définir la tangente de θ, on introduit la tangente t au cercle Γ en $(1;0)$. On prolonge la droite OX et on note $T(\theta)$ sont intersection avec la droite t. Évidement, si par exemple $\theta = \pi/2$, alors les droites OX et t sont parallèles et donc n'ont pas d'intersection. C'est le cas pour toutes les valeurs $\theta = \pi/2 + k\pi$ où k est un nombre entier. Dans ces cas, la tangente n'est pas définie. Dans tous les autres cas, elle est définie de la manière suivante.

Définition 4.2 Pour définir la tangente de θ, on introduit la tangente t au cercle Γ en $(1;0)$. On prolonge la droite OX et on note $T(\theta)$ sont intersection avec la droite t. Évidement, si par exemple $\theta = \pi/2$, alors les droites OX et t sont parallèles et donc n'ont pas d'intersection. C'est le cas pour toutes les valeurs $\theta = \pi/2 + k\pi$ où k est un nombre entier. Dans ces cas, la tangente n'est pas définie. Dans tous les autres cas, elle est définie de la manière suivante. La tangente de $\theta \neq \pi/2 + k\pi$ est définie comme l'ordonnée du point $T(\theta)$. C'est-à-dire

$$T(\theta) = (1; \tan(\theta)).$$

En d'autres termes, la tangente de θ, notée $\tan(\theta)$, est donnée par la distance signée entre le point $(1;0)$ et le point $T(\theta)$. À nouveau, la distance est comptée positivement si le point $T(\theta)$ est situé au-dessus du point $(1;0)$ et négativement si le point $T(\theta)$ est situé au-dessous du point $(1;0)$.

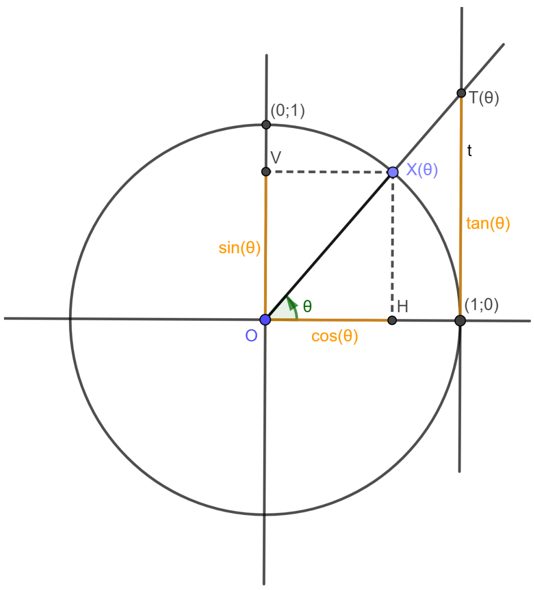


FIGURE 28 : Construction du cosinus et du sinus d'une valeur $\theta > 0$. Dans ce cas, θ est approximativement $\pi/4$. On remarque que le cosinus et le sinus sont positifs.

Ce schéma utilisé pour la construction des fonctions trigonométriques est appelé *cercle trigonométrique*. Comme on va le voir, griffonner un cercle trigonométrique est en général suffisant pour retrouver les différentes formules trigonométriques ou pour se souvenir de quelques valeurs élémentaires. Apprenez à travailler avec cet outil, il vous épargnera beaucoup de travail de mémoire. Vraiment. Si il y a bien une chose à se souvenir dans cette section, c'est bien la figure 7: la fameuse cible.

4.2.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Comme les points H et V se situent toujours à l'intérieur du cercle Γ qui a un rayon 1, le cosinus et le sinus de θ sont toujours des valeurs comprises entre -1 et 1 quelque soit la valeur de l'angle θ. C'est-à-dire, on a défini deux fonctions **surjectives** de l'ensemble des nombres réels vers l'intervalle $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} \sin &\colon \mathbb{R} \to [-1;1], \\ \cos &\colon \mathbb{R} \to [-1;1]. \end{aligned}$$

De plus, lorsque θ s'approche de la valeur $\pi/2$, alors le point $T(\theta)$ qui définit la tangente de θ se situe de plus en plus haut sur la droite t. De même, si θ s'approche de $-\pi/2$, alors le point $T(\theta)$ descend aux abysses sur la droite t. Autrement dit, la fonction tangente peut atteindre n'importe quelle valeur réelle (c'est-à-dire, la fonction tangente est **surjective** vers l'ensemble des nombres réels):

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.$$

On l'a vu: varier la valeur de θ en ajoutant un multiple entier de 2π ne modifie pas la position du point $X(\theta)$ sur le cercle Γ. Quant à la position du point $T(\theta)$ sur la droite t, elle est identique si l'on modifie la valeur de θ en ajoutant un multiple entier de π. En termes techniques, on dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** avec période minimale 2π et que la fonction tangente est périodique avec période minimale π:

$$\begin{cases} \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), \\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta), \end{cases}$$

La construction des fonctions trigonométriques nous permet de calculer quelques valeurs élémentaires des dites fonctions. Par exemple, il est facile de voir que $X(0) = (1;0), X(\pi/2) = (0;1), X(-\pi/2) = (0;-1)$ ou encore $X(\pi) = (-1;0)$. De même, $T(0) = (1;0), T(\pi/4) = (1;1)$ ou encore $T(-\pi/4) = (1;-1)$. On en déduit

	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
cos	0		1		0	-1
sin	-1		0		1	0
tan	-	-1	0	1	-	0

On remarque également, directement en contemplant l'évolution du point $X(\theta)$ sur le cercle trigonométrique lorsque θ croît, que la fonction sinus est **strictement croissante** sur l'intervalle $[-\pi/2;\pi/2]$ et que la fonction cosinus est **strictement décroissante** sur l'intervalle $[0;\pi]$. Ces deux remarques jouent un rôle clef pour les questions d'**injectivité**. Par exemple, si α et β sont deux angles d'un triangle aigu tels que $\sin(\alpha)=\sin(\beta)$, alors on a $\alpha=\beta$. La fonction tangente est quant à elle strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$. On traitera de l'injectivité plus en détails plus loin.

Quid des questions de parité et d'imparité ? Les fonctions sinus et tangente sont **impaires**, alors que la fonction cosinus est **paire**. Autrement dit,

$$\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin(\theta),\\ \cos(-\theta)&=\cos(\theta),\\ \tan(-\theta)&=-\tan(\theta).\end{aligned}$$

Comment démontrer une telle propriété ? Preuve par contemplation à nouveau. En effet, la Figure 8 donne immédiatement le résultat désiré

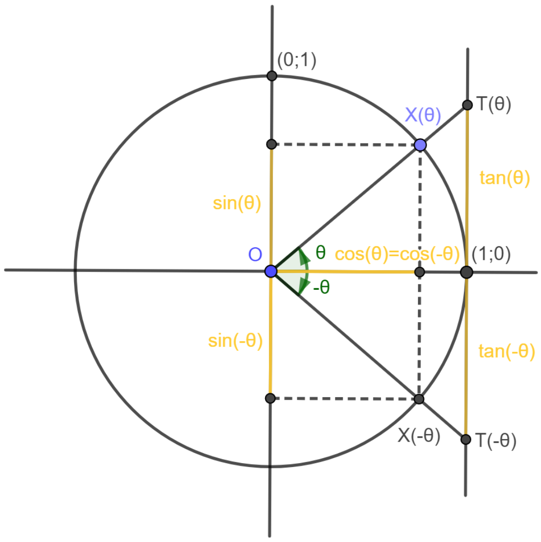


FIGURE 29 : Configuration du cercle trigonométrique où les angles θ et $-\theta$ sont représentés. Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe horizontal, on en déduit la parité du cosinus et l'imparité du sinus et de la tangente.

Toutes les propriétés citées ci-dessus permettent, à présent et sans trop de peine, de dessiner le graphe des fonctions trigonométriques. Inversement, l'œil affuté est capable de lire toutes les propriétés que l'on a énumérées directement du graphe (contempler les figures 30 et 31). D'où l'importance de s'en souvenir.

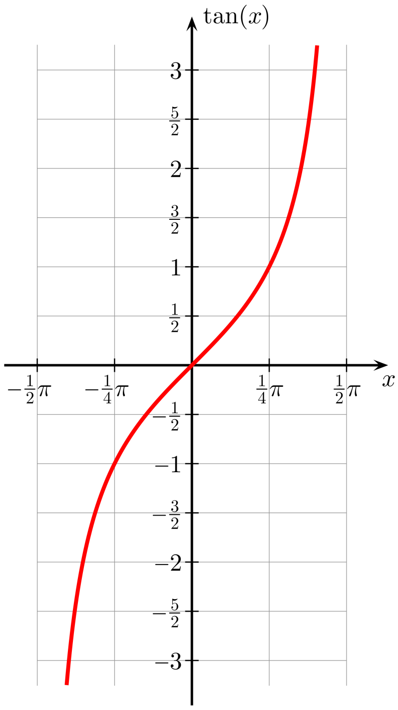


FIGURE 30 : Le graphe de la fonction tangente sur la longueur d'une période entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

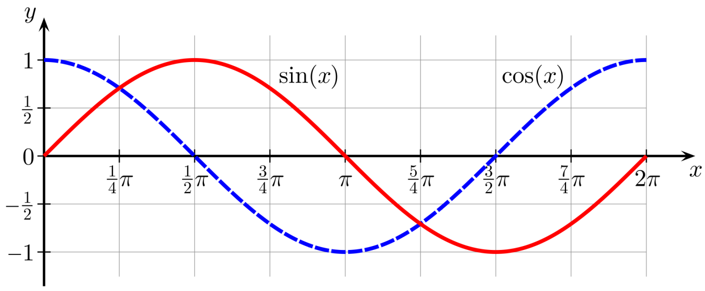


FIGURE 31 : Le graphe des fonctions cosinus et sinus sur la longueur d'une période entre 0 et 2π.

Relations fondamentales Passons à présent à des propriétés plus algébriques des fonctions trigonométriques. Si l'on retourne à la figure 7, on s'aperçoit que les droites HX et t sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient donc $\frac{HX}{OH} = \frac{AT}{OA}$, où A désigne le point $(1; 0)$. En rappelant que $OA = 1$ par construction, on obtient la relation fondamentale suivante

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

De plus, comme le triangle OHX est rectangle en H et $OX = 1$, on obtient par Pythagore une deuxième relation fondamentale

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

En combinant les deux relations précédentes, on obtient

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta).$$

Angles complémentaires et supplémentaires En pratiquant la chasse aux angles dans une figure, on fait souvent apparaître les complémentaires et les supplémentaires de certains angles. Que dire du sinus ou du cosinus du complémentaire d'un angle ? Comme pour les questions de parité et d'imparité, ces relations découlent directement d'une contemplation du cercle trigonométrique. À nouveau, plutôt que de se souvenir des formules, se rappeler de la méthode vous permettra de retrouver la formule voulue en un rien de temps. Conseil d'ami.

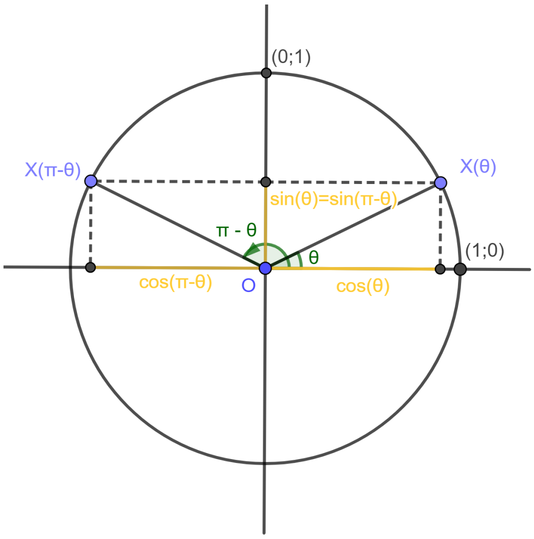


FIGURE 32 : Configuration du cercle trigonométrique où les angles θ et $\pi - \theta$ sont représentés. Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe vertical, on a les formules trigonométriques désirées pour le supplémentaire d'un angle.

En termes algébriques, la figure 4.2.1 lit

$$\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta), \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \end{cases}$$

Les autres relations ci-dessous se démontrent par des figures similaires.

$$\begin{cases} \sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin(\theta), \\ \cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta), \\ \tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan(\theta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin(\theta), \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp 1/\tan(\theta), \end{cases}$$

Remarques sur l'injectivité Les fonctions cosinus et sinus ne sont pas injectives, même réduites à un intervalle de longueur de période minimale 2π. On a par exemple $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$. Il s'agit en fait ici du seul obstacle à l'injectivité sur un intervalle de longueur 2π. Autrement dit, on a

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ ou} \\ \theta_1 = -\theta_2 + 2k\pi, \end{cases}$$

et

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ ou} \\ \theta_1 = \pi - \theta_2 + 2k\pi. \end{cases}$$

La fonction tangente est injective sur l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$. Autrement dit, on a

$$\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta_1 = \theta_2 + k\pi.$$

Addition des arcs Une chasse aux angles fait souvent apparaître des sommes d'angles. Il est donc souhaitable d'avoir une formule trigonométrique pour la somme des angles. Comme on va le voir, ces formules sont techniquement plus compliquées que les précédentes. La manière dont elles sont introduites ici est en soi un bon moyen mnémotechnique pour s'en rappeler. L'idée est d'utiliser la formule d'Euler pour les nombres complexes:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

On obtient d'un côté

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

et de l'autre, en utilisant les propriétés des exponentielles,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \\ &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)). \end{aligned}$$

On en conclut les formules pour l'addition des arcs

$$\begin{cases} \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \end{cases}$$

En remplaçant θ_2 par $-\theta_2$ et en utilisant les règles de parités, on obtient aussi les formules pour la différence des arcs

$$\begin{cases} \sin(\theta_1-\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \end{cases}$$

En écrivant la tangente comme le quotient du sinus et cosinus, alors des formules précédentes il découle

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan(\theta_1)+\tan(\theta_2)}{1-\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}, \quad \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan(\theta_1)-\tan(\theta_2)}{1+\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}.$$

Le double d'un arc Si l'on pose $\theta_1 = \theta_2 =: \theta$ dans les formules d'addition des arcs, alors on obtient immédiatement les formules pour le double d'un angle:

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \cos(2\theta) &= \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 1 - 2\sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1, \end{aligned}$$

où, pour le cosinus, on a utilisé la formule $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$ pour réécrire de manière différente l'expression obtenue. À nouveau, on obtient la formule analogue pour la tangente en prenant le quotient des formules pour le sinus et le cosinus:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}.$$

Transformation de sommes en produits Ces dernières formules, plus techniques, s'avèrent très utiles. De toutes les formules trigonométriques listées ici, elles sont les moins triviales. L'idée est de pouvoir exprimer la somme de deux fonctions trigonométriques comme un produit et *vice versa*. Par exemple, en additionnant les formules pour la somme et la différence des arcs, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) &= \frac{1}{2}(\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)),\\
\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) &= \frac{1}{2}(\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)),\\
\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) &= \frac{1}{2}(-\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)).
\end{aligned}$$

En posant, $\alpha_1 := \theta_1+\theta_2$ et $\alpha_2 := \theta_1-\theta_2$, alors on peut réécrire les formules ci-dessus de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha_1)+\sin(\alpha_2) &= 2\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right),\\
\cos(\alpha_1)+\cos(\alpha_2) &= 2\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right),\\
\cos(\alpha_1)-\cos(\alpha_2) &= -2\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Il existe aussi des formules similaires pour la tangente. On les obtient en écrivant la tangente comme le quotient du sinus et du cosinus et en utilisant la formule pour le sinus d'une somme de deux angles:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha_1)+\tan(\alpha_2) &= \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)},\\
\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2) &= \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

4.2.2 Formulaire

Pour appliquer de manière efficace la trigonométrie aux problèmes d'olympiades, il faut être à l'aise avec les formules trigonométriques, sans quoi il est impossible de simplifier les expressions que l'on obtient. Les apprendre par cœur n'est pas très intéressant. Savoir les retrouver à partir des arguments que l'on a présentés est une piste plus intelligente. Par exemple, souvenez-vous qu'il est possible de retrouver les formules d'addition des arcs à partir de la formule d'Euler pour les nombres complexes plutôt. On récapitule toutes les formules trigonométriques présentées plus haut de manière concise dans le tableau suivant. C'est un bon compagnon.

TABLE

4.3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Introduire les fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique nous fait se cantonner à un rayon unité. Si l'on désire travailler dans un cercle général, alors un argument d'homothétie permet d'adapter de manière appropriée les définitions des fonctions trigonométriques. C'est l'essence du théorème suivant.

Proposition 4.1 (Trigonométrie du triangle rectangle) *Soit ABC un triangle rectangle en C et soit α l'angle en A. Alors*

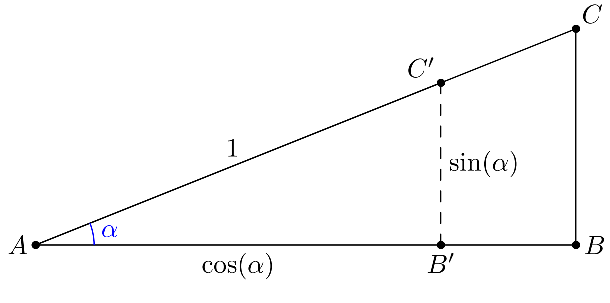
$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{BC}{AB} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypothénuse}}, \\ \cos(\alpha) &= \frac{AC}{AB} = \frac{\textit{adjacent}}{\textit{hypothénuse}}, \\ \tan(\alpha) &= \frac{BC}{AC} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}. \end{aligned}$$

Dans un triangle rectangle, il n'y a jamais d'angle obtus. En particulier, les trois fonctions trigonométriques appliquées aux angles non-droits du triangles sont toujours des nombres réels positifs. Moralité: on n'a pas besoin de prendre en compte des distances orientées dans ce contexte.

Le moyen mnémotechnique standard pour se rappeler des formules trigonométriques dans le triangle rectangle consiste à se rappeler des trois "mots" suivants

sinopphyp, *cosadhyp* et *tangopad*.

Démonstration. La preuve des formules pour le triangle rectangle est une application du théorème de Thalès. Il suffit pour cela de reconstruire la configuration du cercle trigonométrique. Soit B' un point sur AB à une distance 1 de A et C' son projeté sur AC. On assimile le cercle de centre A qui passe par B' (donc de rayon unité) au cercle trigonométrique Γ.



Par définition, on a alors

$$\sin(\alpha) = B'C', \quad \cos(\alpha) = AC'.$$

Par Thalès, comme les droites $B'C'$ et BC sont parallèles, on conclut que

$$\sin(\alpha) = B'C' = \frac{BC}{AB}, \quad \cos(\alpha) = AC' = \frac{AC}{AB}.$$

Finalement, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{BC}{AC}.$$

□

La trigonométrie fournit toute sorte de formules. Une d'entre elles permet de calculer l'aire d'un triangle directement à partir de la mesure d'un angle et des deux côtés correspondants.

Exemple 15 (Aire du triangle) *Soit ABC un triangle. On note $a := BC, b := AC, c := AB$ et α, β, γ les angles en A, B, C respectivement. Si $[ABC]$ dénote l'aire du triangle ABC, alors on a*

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin(\beta).$$

Solution. Comme on va le voir, il s'agit d'une simple application des formules trigonométriques pour le triangle rectangle. Soit H la projection de A sur BC. On sait que

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH.$$

Par construction, le triangle BAH est rectangle en H. Des formules trigonométriques pour le triangle rectangle, on obtient la relation suivante (*sinopphyp*):

$$\sin(\beta) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypothénuse}} = \frac{AH}{AB}.$$

On a donc $AH = c \cdot \sin(\beta)$ et on conclut comme désiré que $[ABC] = 1/2 \cdot ac \cdot \sin(\beta)$. Les autres égalités s'obtiennent symétriquement. □

Exemple 16 (Hauteur d'un triangle rectangle) *Soit ABC un triangle rectangle en C. Alors la longueur au carré de la hauteur issue de C est égale au produit des deux distances qu'elle détermine sur l'hypoténuse. Autrement dit, si H est le pied de la hauteur issue de C, alors*

$$CH^2 = AH \cdot BH.$$

Solution. Les triangles ACH et BCH sont rectangles en H. La fonction tangente relie les longueurs AH et CH à l'angle en A, noté α, dans le triangle ACH. En effet,

$$\tan(\alpha) = \frac{CH}{AH}.$$

Observer que $\angle HBC = 90° - \angle HAC = 90° - \alpha$. Dans le triangle BCH, on obtient alors par analogie

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{CH}{BH}.$$

On se souvient à présent que $\tan(90° - \alpha) = 1/\tan(\alpha)$ (une manière de se rappeler de cette formule est de retrouver les formules pour le sinus et le cosinus en griffonnant un cercle trigonométrique et de diviser ensuite les relations obtenues). En multipliant les deux égalités, on obtient la relation désirée. □

4.4 Les théorèmes du sinus et du cosinus

L'intuition derrière la trigonométrie est la suivante. La longueur des côtés d'un triangle détermine entièrement le triangle (à rotations et translations près). En particulier, la valeur des angles est déterminée par la longueur des côtés. Pourtant, jusqu'ici, on n'a vu aucun moyen de déterminer la valeur des angles d'un triangle à partir de la longueur des côtés. La trigonométrie comble cette lacune.

Proposition 4.2 *Soit ABC un triangle. On note $a := BC, b := AC, c := AB$ et α, β, γ les angles en A, B, C respectivement. Soit R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Alors*

1. *(Théorème du sinus)*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R,$$

2. *(Théorème du cosinus)*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha), \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma). \end{aligned}$$

Quelques commentaires avant de passer à la preuve de ces résultats. Un manière d'interpréter le théorème du sinus est de le voir comme une généralisation du théorème des triangles semblables (illustrant dans un certain sens la puissance de la trigonométrie). En effet, si l'on se donne deux triangles dont les angles ont les mêmes mesures, alors en divisant les égalités fournies par le théorème du sinus appliqué aux deux triangles, les sinus se simplifient et on obtient exactement la relation désirée sur les rapports de longueurs des côtés. On peut interpréter l'égalité avec le rayon du cercle circonscrit comme un petit bonus.

On peut voir le théorème du cosinus quant à lui comme une généralisation du théorème de Pythagore. En effet, dans le cas particulier où $\alpha = \pi/2$ (autrement dit, lorsque le triangle ABC est rectangle en A), alors, comme $\cos(\pi/2) = 0$, le théorème du cosinus donne $a^2 = b^2 + c^2$ qui est exactement la relation de Pythagore.

Ensemble, les théorèmes du sinus et du cosinus permettent de déterminer entièrement un triangle à partir d'un nombre suffisant de paramètres. Par exemple, si l'on connait la longueur des trois côtés, alors le théorème du cosinus nous donne la valeur des angles du triangle. Il suffit en effet, de résoudre l'équation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ pour α pour déduire la valeur de l'angle en A. De même, étant donnés deux angles et une longueur, alors on trouve d'abord la valeur du troisième angle, puis en appliquant deux fois le théorème du sinus on en déduit la longueur des deux côtés restants.

En pratique la stratégie est la suivante. En appliquant les théorèmes du sinus et du cosinus à différents triangles dans la figure correspondante au problème donné, on obtient une liste d'égalités entre ratios de distances et de sinus. Si l'on a choisi nos triangles judicieusement, alors en multipliant ces égalités on va constater un certain nombre de simplifications qui vont nous permettre de déduire de nouvelles relations géométriques. En chemin, on usera des formules trigonométriques dans le but de simplifier les expressions algébriques obtenues.

Démonstration. Commençons par le théorème du sinus. La preuve est courte et astucieuse. Elle utilise simplement un argument de symétrie. De l'exemple précédent, on sait que l'on peut exprimer l'aire du triangle ABC de la manière suivante $[ABC] = 1/2 \cdot ab\sin(\gamma)$. Si l'on manipule cette expression pour faire apparaitre les termes présents dans le théorème du sinus, alors on obtient

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2[ABC]}.$$

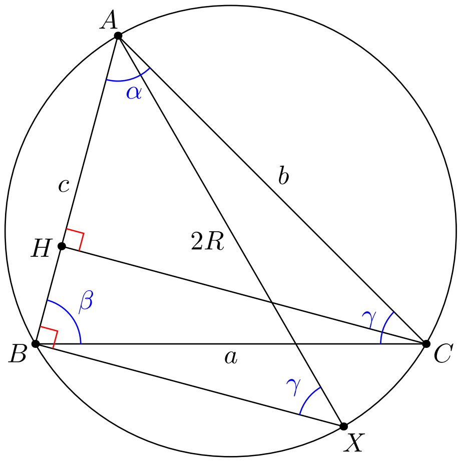
Comme l'expression du membre de droite est symétrique en a, b et c, il s'en suit que l'expression du membre de gauche doit également être symétrique en a, b et c. Autrement dit, on doit avoir

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

Comment intervient le rayon du cercle circonscrit dans toute cette histoire ? De manière très simple, comme on va le voir. On note ω le cercle circonscrit à ABC. Soit X le point diamétralement opposé à A sur ω. Alors, par Thalès, le triangle AXB est rectangle en B. De plus, $\angle AXB = \angle ACB = \gamma$. En appliquant les formules de trigonométries pour le triangle rectangle à AXB, on obtient

$$\sin(\gamma) = \frac{AB}{AX} = \frac{c}{2R} \Longleftrightarrow \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$

Passons au théorème du cosinus. On a déjà relevé la similitude entre le théorème du cosinus et le théorème de Pythagore. Avec cette idée en tête, on va chercher à faire apparaitre



un angle droit de manière à pouvoir utiliser Pythagore. Soit donc H la projection de C sur AB. Le triangle CHA est rectangle en H. Les formules de trigonométries appliqués au sommet A du triangle CHA nous donnent

$$CH = b \cdot \sin(\alpha), \quad HA = b \cdot \cos(\alpha).$$

Notez que le triangle BHC est également rectangle (en H). On peut donc appliquer Pythagore dans ce triangle. Pour cela, nous devons encore calculer la valeur du côté BH. Comme l'on connait AH, on a simplement $BH = c - AH = c - b \cdot \cos(\alpha)$. Pythagore nous donne alors

$$\begin{aligned} a^2 &= CH^2 + BH^2 \\ &= b^2 \cdot \sin(\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 \\ &= b^2\underbrace{(\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2)}_{=1} + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Le théorème du cosinus est ainsi démontré. □

L'exemple suivant illustre un problème dans lequel la donnée suggère une approche trigonométrique. Comme on va le voir, la preuve trigonométrique n'est pas plus courte, ni plus élégante que la solution classique. En revanche, avec la pratique, elle paraîtra moins astucieuse que l'approche standard.

Exemple 17 (Tour final 2013) *Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit tel que $\angle ABD = \angle ADC$. Soit E la projection de A sur BD. Montrer que $BC + BE = DE$.*

Solution classique. Observons tout d'abord que $\angle DCA = \angle DBA = \angle ADC$. Et donc $AD = AC$. Comment procéder à présent ? La configuration et l'idée qui en découle est une astuce classique que vous pourrez réutiliser. Observer bien.

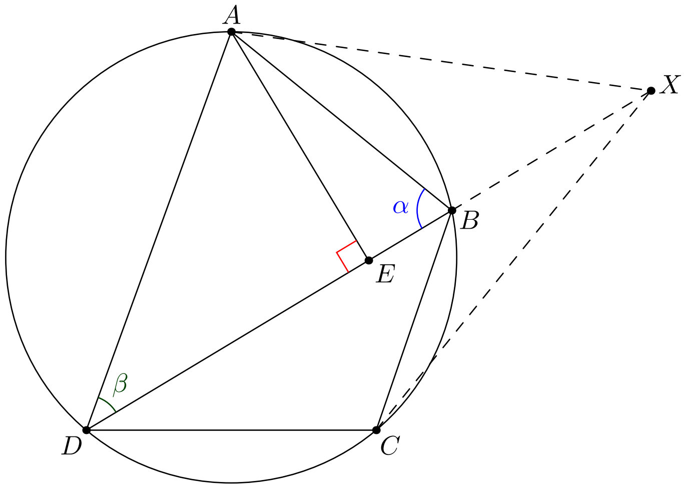


FIGURE 33 : SMO 2013/3

La clef est de faire bon usage du point E et de l'orthogonalité. Noter que la distance DE intervient dans la conclusion et, de plus, on a déjà remarqué que le triangle ADC était isocèle en A. En combinant ces deux idées, il devient intéressant d'introduire le point X sur la droite DE tel que E soit le milieu de DX (voilà l'astuce!). De cette manière, le triangle ADX est isocèle en A et on a $AD = AC = AX$.

En particulier, $\angle AXD = \angle ADX = \angle ACB$. Comme $AC = AX$, on a également $\angle ACX = \angle AXC$. On déduit que $\angle BCX = \angle ACX - \angle ACB = \angle AXC - \angle AXB = \angle BXC$ et donc $BC = BX$.

Finalement, on conclut

$$DE = EX = EB + BX = EB + BC.$$

$\square$

Solution trigonométrique. A priori la conclusion que l'on cherche à démontrer relie des distances qui ne sont pas directement connectées entre elles sur la figure. C'est une situation typique où la trigonométrie peut aider à y voir plus clair. La stratégie consiste à exprimer chacune des distances BC, BE et DE à l'aide d'un certain nombre de paramètres. Idéalement, on chercherait à avoir autant de paramètres que de *degrés de liberté* pour la figure.

Par exemple, dans le problème qui nous concerne ici, on commence par placer les points A et B. Le premier paramètre est donné par la distance AB. Noter que la position du point A n'est pas considéré comme un paramètre, car elle ne modifie la figure que par translation. De même, la position du point B (sur le cercle de rayon AB centré en A) n'est pas non plus pertinente, car elle ne modifie la figure que par une rotation. Ensuite, on construit le point D en choisissant la valeur de l'angle $\angle ABD$ et la distance BD. On obtient ainsi deux paramètres supplémentaires. Finalement, on remarque que la position du point C est à présent uniquement déterminée comme l'intersection du cercle passant par ABD avec la droite passant par D qui fait un angle $\angle ABD$ avec la droite AD. En conclusion, nous avons donc trois degrés de liberté (lorsqu'on ne prend pas en compte les rotations et les translations de la figure).

Les distances qui nous intéressent sont BC, BE et DE. Un choix naturel de trois paramètres serait alors $\alpha := \angle ABD$, $\beta := \angle ADB$ et la distance BD. Ce choix est en quelque sorte "symétrique" par rapport aux distances BE et DE, donc naturel.

Exprimons à présent les trois distances à l'aide de nos paramètres. Observer déjà que $\angle DCB = 180° - \angle DAB = \alpha + \beta$. Dans le triangle ABE, rectangle en E, on a

$$BE = AB \cdot \cos(\alpha).$$

Le théorème du sinus dans le triangle ABD nous permet d'exprimer AB à l'aide de nos trois paramètres. En effet, on a $AB = BD \cdot \sin(\beta)/\sin(\alpha + \beta)$ (où l'on a utilisé $\sin(\angle DAB) = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$). Ainsi on a

$$BE = BD \cdot \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

et de manière symétrique

$$DE = BD \cdot \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Observer encore que $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = \alpha - \beta$. Le théorème du sinus dans le triangle BDC donne alors

$$BC = BD \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

La condition $BC + BE = DE$ est donc, après simplification des termes BD et $\sin(\alpha+\beta)$, équivalente à

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

que l'on sait vérifiée (d'où l'importance de connaître ses formules). $\square$

Exemple 18 (MEMO or something) *Deux cercles de centres O_1 et O_2 s'intersectent en deux points A et B. Les tangentes en A intersectent BO_1 et BO_2 en K et L respectivement. Monter que KL est parallèle à O_1O_2.*

Solution classique. Commençons par une chasse aux angles. On sait que les rayons des cercles sont perpendiculaires aux tangentes. Donc $\angle KAO_1 = 90° - \angle KAL = \angle LAO_2$. Ainsi

$$\angle KAL = 90° - \angle KAO_1 = 180° - \angle O_1AO_2 = 180° - \angle O_1BO_2,$$

où dans la dernière égalité, on a utilisé que $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$ (comment ? par symétrie, simplement). Donc, les points A, K, B et L sont cocycliques.

On sait que AB est orthogonal à O_1O_2 (c'est une propriétés classiques de la droite qui passe par le centre des cercles et elle se justifie également par un argument de symétrie,

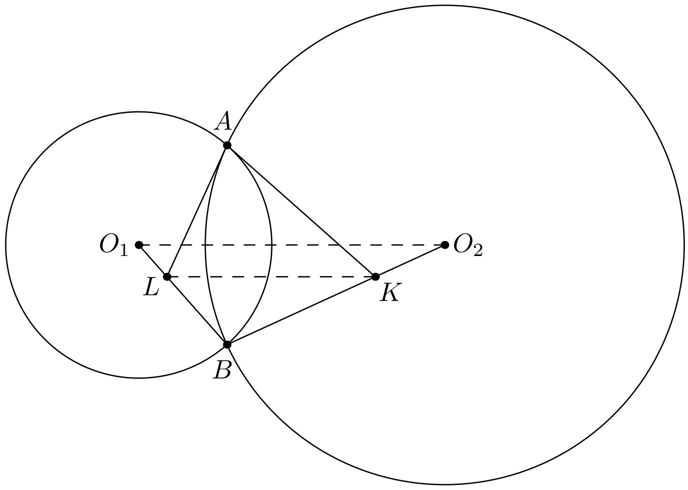


FIGURE 34 : $KL \parallel O_1O_2$

par exemple). Pour conclure que KL est parallèle à O_1O_2, il suffit de montrer que KL est perpendiculaire à AB. Par chasse aux angles, on obtient $\angle KBA = \angle O_1BA = \angle O_1AB$, car $O_1A = O_1B$. Or, $\angle O_1AB = 90° - \angle BAL = 90° - \angle BKL$ en utilisant que les points A, B, K, L sont sur un cercle. On a donc bien $\angle KBA = 90° - \angle BKL$ et on ainsi terminé. $\square$

Solution trigonométrique. Comme dans la solution précédente, on obtient que les points A, K, B, L sont sur un cercle. Eh oui, une preuve n'est jamais entièrement trigonométrique. Il est toujours bon de commencer par les méthodes classiques en essayant de déduire quelques propriétés de base sur la figure. La chasse aux angles avant toute chose!

Pour déduire que les droite KL et O_1O_2 sont parallèles, il est suffisant de montrer que $BK/KO_1 = BL/LO_2$. Essayons de calculer ces ratios à l'aide du théorème du sinus. On observe tout d'abord que $BO_1 = AO_1$ et $BO_2 = AO_2$. Cette observation (triviale) nous permet de réécrire les deux ratios comme les fractions de longueurs de côtés dans les triangles AO_1K et AO_2L. Appliquons à présent le théorème du sinus. On obtient

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{AO_1}{KO_1} = \frac{\sin \angle AKO_1}{\sin \angle O_1AK} = \frac{\sin \angle ALO_2}{\sin \angle O_2AL} = \frac{AO_2}{LO_2} = \frac{BO_2}{LO_2}.$$

On a utilisé la propriété $\angle O_1AK = \angle O_2AL$ établie dans la solution précédente, ainsi que $\angle AKO_1 = 180° - \angle ALO_2$ avec l'identité $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. $\square$

4.5 Le lemme magique

Comme son nom l'indique, le lemme suivant, malgré sa naïveté apparente, s'avère extrêmement utile en pratique. C'est le premier résultat présenté ici que vous ne trouverez pas nécessairement dans toutes les introductions à la trigonométrie. Pour être tout-à-fait précis, les distances et les mesures des angles sont maintenant considérées comme des grandeurs signées.

Proposition 4.3 (Lemme magique) *Soit ABC un triangle. On note $b := AC, c := AB$. Soit X un point sur la droite BC (pas nécessairement sur le côté BC) et $\alpha_1 := \angle BAX$ et $\alpha_2 := \angle CAX$. Alors*

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \cdot \frac{c}{b}.$$

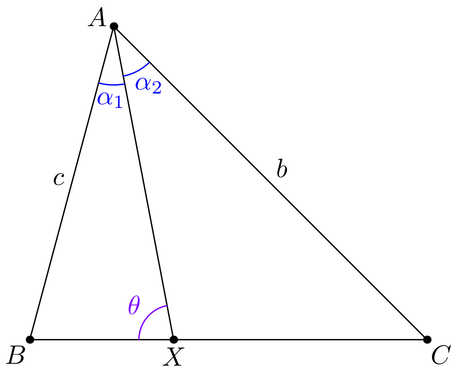


FIGURE 35 : Le lemme magique

Comment interpréter le lemme magique ? Le point X est quelconque sur le côté BC. Pour décrire la position du point X, on peut soit utiliser un angle: la valeur de α_1 détermine uniquement la position du point X (noter que $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$); soit une distance: la distance BX détermine uniquement la position de X sur le côté BC (noter que $CX = a - BX$). Le lemme magique fournit ainsi la relation qui permet de jongler entre ces deux approches pour caractériser le point X. Encore une fois, le lemme magique est un résultat de trigonométrie qui fait le pont entre distances et mesures d'angles.

Démonstration. La preuve repose essentiellement sur la relation $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$ comme on va le voir. Notons $\theta := \angle BXA$. Alors $\angle CXA = \pi - \theta$. Le théorème du sinus appliqué aux triangles ABX, puis ACX, nous donne respectivement

$$\frac{BX}{\sin(\alpha_1)} = \frac{c}{\sin(\theta)}, \quad \frac{CX}{\sin(\alpha_2)} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{b}{\sin(\theta)}.$$

En divisant ces deux relations, le terme $\sin(\theta)$ se simplifie et on obtient, après avoir amené les termes du bon côté,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \cdot \frac{c}{b}.$$

comme désiré. $\square$

Pour illustrer le lemme magique, on commence par deux théorèmes qui peuvent s'avérer très pratiques. Ils relient des notions telles que la concourance de trois droites ou le fait que trois points sont alignés avec une condition algébrique sur les distances ou les angles. A nouveau, on traite ici avec des mesures d'angles et des distances signées.

Proposition 4.4 (Céva & Ménélaüs) *Soit ABC un triangle. Soient E, F et G des points sur les droites BC, CA et AB respectivement (pas forcément sur les côtés).*

1. (Céva) *Les droites AE, BF et CG sont concourantes (ou parallèles) si et seulement si l'une des deux conditions (équivalentes) est satisfaite.*
   - $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$,
   - $\frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} = 1$.

2. (Ménélaüs) *Les points E, F et G sont alignés si et seulement si l'une des deux conditions (équivalentes) est satisfaite.*
   - $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$,
   - $\frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} = -1$.

Démonstration. On ne va démonter ici qu'une direction du théorème de Céva, le reste est laissé en exercice. Supposons que les droites soient concourantes, et essayons d'établir les deux égalités sur le produit des ratios. En appliquant le lemme magique au triangle ABC par rapport au fameux point G, on obtient

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{AC}{BC}.$$

De manière similaire,

$$\frac{BE}{EC} = \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA} \cdot \frac{BC}{AB}.$$

En multipliant ces trois égalités, on obtient

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle GCB} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC} \cdot \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle FBA}.$$

Il suffit donc de monter que l'un de ces produits est égal à 1. Soit X le point de concourance des droites. Appliquons le théorème du sinus au triangle AXB, on obtient

$$\frac{BX}{AX} = \frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XBA} = \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle FBA}.$$

De manière similaire,

$$\frac{CX}{BX} = \frac{\sin \angle CBF}{\sin \angle GCB}, \quad \frac{AX}{CX} = \frac{\sin \angle ACG}{\sin \angle EAC}.$$

En multipliant ces trois ratios, on obtient la relation désirée. $\square$

L'exemple suivant est tiré de la sélection IMO de 2014. La solution sans méthode trigonométrique est suffisamment élaborée pour que le problème ait été proposé en qualité de difficulté medium. On va voir que la solution trigonométrique est bien plus directe.

Exemple 19 (IMO Sélection 2014) *Soit ABC un triangle dans lequel $\alpha := \angle BAC$ est le plus petit angle (strictement). Soit P un point sur le côté BC et D un point sur la droite AB tel que B se situe entre A et D et $\angle BPD = \alpha$. De même, soit E un point sur la droite AC tel que C se situe entre A et E et $\angle EPC = \alpha$. Montrer que les droites AP, BE et CD sont concourantes si et seulement si AP est perpendiculaire à BC.*

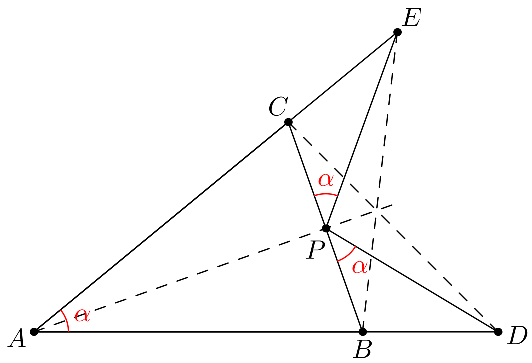


FIGURE 36 : IMO-Séléction 2014/5

Solution. On veut montrer que trois droites sont concourantes, on pense donc immédiatement au théorème de Ceva. Introduisons pour ce faire le point X qui est l'intersection des droites AP et ED. On a alors que les droites AP, BE et CD sont concourantes si et seulement si

$$\frac{AC}{CE} \cdot \frac{EX}{XD} \cdot \frac{DB}{BA} = 1.$$

(On choisit ici l'énoncé en termes de distances. La preuve fonctionne également avec l'énoncé en termes d'angles.) L'idée est d'utiliser le lemme magique pour calculer ces différents ratios. Soit $\gamma := \angle APB = \angle CPX$. Alors $\angle CPA = \angle XPB = 180° - \gamma$, $\angle XPB = 180° - \gamma - \alpha$ et $\angle XPE = \gamma - \alpha$. En appliquant le lemme magique au triangle APD par rapport au point B, on obtient

$$\frac{DB}{BA} = \frac{PD}{PA} \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}.$$

De même, avec les triangles APE et EPD, on obtient

$$\frac{AC}{CE} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)},$$
$$\frac{EX}{XD} = \frac{PE}{PD} \cdot \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(180° - \gamma - \alpha)} = \frac{PE}{PD} \cdot \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\gamma + \alpha)}.$$

En multipliant ces trois relations et après simplifications, on obtient que les droites AP, BE et CD sont concourantes si et seulement si $\sin(\gamma+\alpha) = \sin(\gamma-\alpha)$. L'équation $\sin(x) = \sin(y)$ admet deux familles de solutions:

1. $x = y + 2k\pi$,
2. $x = \pi - y + 2k\pi$,

où $k \in \mathbb{Z}$. Dans le cas présent, on obtient soit $\gamma = \pi/2 + k\pi$ ou $\alpha = k\pi$. Comme $\alpha > 0$ est le plus petit angle du triangle, le deuxième cas d'égalité se résume à $\alpha = 0$, ce qui est impossible. De plus, comme $0 < \gamma < \pi$, le premier cas se résume à $\gamma = \pi/2$. En résumé

$$\begin{aligned} AP, BE, CD \text{concourantes} &\iff \sin(\gamma+\alpha) = \sin(\gamma-\alpha) \\ &\iff \gamma = \pi/2 \\ &\iff AP \perp BC. \end{aligned}$$

□

On termine cette section sur la trigonométrie avec une application du lemme magique pour résoudre un problème récent d'IMO. La solution suivante a été proposée par Kaloyan Slavov.

Exemple 20 (IMO 2018) *Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Les points D et E sont situés sur les segments AB et AC respectivement, de sorte que $AD = AE$. Les médiatrices de BD et CE coupent les petits arcs AB et AC aux points F et G respectivement. Montrer que les droites DE et FG sont parallèles (ou confondues).*

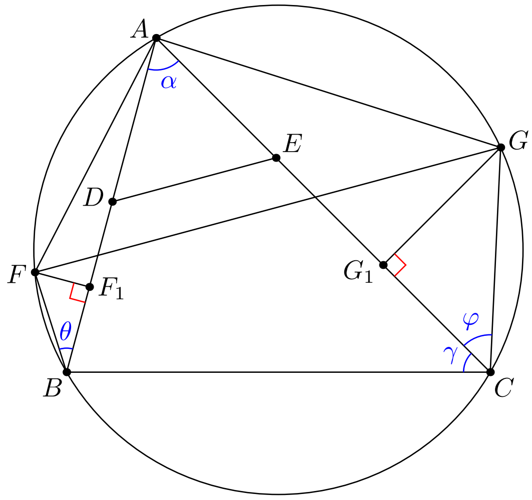


FIGURE 37 : IMO 2018/1

Solution. Soient F_1 et G_1 les milieux des segments BD et CE. Soit $\alpha = \angle DAE$. Alors $\angle ADE = 90° - \alpha/2$, car $AD = AE$. Il suffit donc de montrer que l'angle entre les droites

AB et FG est $90° - \alpha/2$ et on pourra conclure que les droites DE et FG sont parallèles. Noter que si X est l'intersection des droites AB et FG, alors l'angle entre les droites AB et FG est donné par

$$\angle AXG = \angle BAF + \angle GFA = \angle BAF + \angle ACG.$$

On va donc essayer de calculer les angles $\angle BAF$ et $\angle ACG$ (ou symétriquement, les angles $\angle ABF$ et $\angle CAG$).

Commençons par une mauvaise approche. En pratique, vous ferez souvent face à des approches qui ne mènent nulle part. L'expérience vous apprendra à quel moment laisser tomber les calculs pour envisager une meilleure approche. En d'autres mots, la maturité trigonométrique, quoi!

Les degrés de liberté de la figure sont donnés par les paramètres standards du triangles ABC plus un paramètre qui détermine la position des points D et E. Soit donc $m := AD = AE$ (et comme d'habitude $a = BC, b = AC, c = AB$). Essayons de calculer les angles $\angle ABF$ et $\angle BAF$. La première relation entre ces deux angles est $\angle ABF + \angle BAF = \angle BCA = \gamma$. C'est une conséquence du fait que F se trouve sur Γ. Les triangles BFF_1 et AFF_1 sont par construction rectangles en F_1. On obtient donc

$$\tan \angle ABF = \frac{FF_1}{BF_1}, \quad \tan \angle BAF = \frac{FF_1}{AF_1}$$

Observer encore que $F_1B = (c-m)/2$ et $AF_1 = (c+m)/2$. On obtient ainsi une deuxième équation qui relie les valeurs de $\angle ABF$ et $\angle BAF$ aux paramètres choisis:

$$\frac{c+m}{c-m} = \frac{\tan \angle ABF}{\tan \angle BAF}.$$

Pour résoudre ce système, on commence par appliquer la fonction tangente à la relation $\angle ABF + \angle BAF = \gamma$ en utilisant la formule d'addition des arcs. On obtient alors, en combinant les deux relations, une équation quadratique en $\tan \angle ABF$ et $\tan \angle BAF$. On sent alors que l'algèbre va devenir compliquée avec des racines carrées de fonctions trigonométriques.

Changeons d'approche. Un principe de base de la trigonométrie, qui explique l'échec de l'approche précédente, est le suivant:

> il est préférable d'introduire comme paramètre un angle et d'exprimer les distances en conséquent, qu'introduire une distance pour calculer des angles.

Appliquons ce principe. On introduit en conséquent $\theta := \angle ABF$ et on calcule AD en fonction de de θ. En utilisant la relation précédente, on a

$$\frac{c+AD}{c-AD} = \frac{\tan(\theta)}{\tan(\gamma - \theta)}$$

et donc, après un peu d'algèbre, notamment en utilisant la formule $\tan(\alpha)+\tan(\beta) = \sin(\alpha+\beta)/\cos(\alpha)\cos(\beta)$, findet man

$$AD = c \cdot \frac{\tan(\theta)-\tan(\gamma-\theta)}{\tan(\theta)+\tan(\gamma-\theta)} = c \cdot \frac{\sin(2\theta-\gamma)}{\sin(\gamma)}.$$

On peut encore utiliser la relation $2R = c/\sin(\gamma)$ donnée par le théorème du sinus (R étant le rayon de Γ) pour simplifier et obtenir $AD = 2R\sin(2\theta-\gamma)$. De manière similaire, avec $\varphi := \angle ACG$, on a

$$AE = 2R\sin(2\varphi-\beta).$$

Or, on sait que $AD = AE$, ainsi $\sin(2\theta-\gamma) = \sin(2\varphi-\beta)$. Le premier cas d'égalité nous donne

$$\varphi - \theta = \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \gamma.$$

Ainsi, on obtient comme désiré

$$\angle BAF + \angle ACG = (\gamma-\theta)+\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Le deuxième cas d'égalité des sinus donne

$$\theta + \varphi = \frac{\pi+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Or dans le triangle AFG, on peut calculer que (en utilisant que les points B, F, A, G, C se trouvent sur Γ),

$$\alpha \leq \angle FAG = 180^\circ - \angle AGF - \angle AFG = 180^\circ - \theta - \varphi$$

et donc on aurait $\alpha \leq \alpha/2$ ce qui implique $\alpha = 0$. C'est un cas dégénéré que l'on peut considérer comme impossible. Le deuxième cas d'égalité ne mène donc nulle part et on a terminé. $\square$