Exercices Géométrie II

Actualisé: 30 janvier 2016
vers. 2.0.0

Triangles semblables

1. Dans le triangle $\triangle ABC$ soit D un point arbitraire sur le segment AB. Soit E le point d'intersection de AC avec la droite parallèle à BC passant par D et F le point d'intersection de AB avec la droite parallèle à CD passant par E. Quelle est la longueur de DB si les valeurs $AF = 4$ et $FD = 6$ sont connues ?

2. Le point Z se trouve sur le côté BC du triangle $\triangle ABC$. Soit X le point d'intersection de la droite AC avec la droite parallèle à AZ passant par B et Y le point d'intersection de AB avec la droite parallèle à AZ passant par C. Montrer que

$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CY}.$$

3. Soit AB un arc du cercle k et P un autre point sur k. Soit Q la projection de P sur la droite AB et soient R et S les projections de P sur les droites tangentes à k en A respectivement en B. Montrer que PQ est la moyenne géométrique de PR et PS.

4. Les deux arcs AB et CD se coupent à l'intérieur du cercle en E. Soit P un point quelconque sur le segment BE. La tangente t passant par E au cercle passant par D, P et E coupe les droites BC et AC en F, resp. en G. Soit $q = \frac{AP}{AB}$. Trouver $\frac{EG}{EF}$ en fonction de q. (Tu peux trouver une approche à l'exemple 4 (page 6) dans le script de Géométrie I).

Working Backward

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $CD = DA \doteq s$. Tous les angles du quadrilatère sont connus :

$$\angle DAB = 40^\circ \quad \angle ABC = 80^\circ \quad \angle BCD = 80^\circ \quad \angle CDA = 160^\circ$$

Montrer que $BC = s$.

2. Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle avec le sommet en A. Soit D le milieu du côté AC et soit E la projection de D sur BC. Soit F le milieu de DE. Montrer que les droites BF et AE sont perpendiculaires si et seulement si le triangle $\triangle ABC$ est équilatéral.

3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit tel que $AB + CD = BC$. Montrer que le point d'intersection des bissectrices de $\angle DAB$ et $\angle CDA$ se trouve sur le côté BC.

4. Deux cercles se coupent aux points A et B. Une droite passant par A coupe les cercles encore une fois en C et D. Soient P et Q les projections de B sur les tangentes en C resp. en D. Montrer que la droite PQ est tangente au cercle ayant pour diamètre AB.

La puissance d'un point

1. Soient k un cercle et A, B deux points ayant la même puissance (orientée) par rapport à k. Montrer alors que A et B sont à la même distance du centre de k.

2. Soit P un point quelconque à l'intérieur du triangle aigu $\triangle ABC$ et H_a le pied de la hauteur passant par A. Soient D, E, Q les projections de P sur AB, AC resp. AH_a. Montrer que

$$|AB \cdot AD - AC \cdot AE| = BC \cdot PQ.$$

3. Soit g une droite quelconque et A, B deux points des côtés différents de g. Un cercle k passant par A et B coupe g en P et Q. Trouver le cercle k_{min} tel que la distance PQ soit minimale.

4. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle s de diamètre AB. Les droites AC et BD se coupent en E et AD coupe BC en F. La droite EF coupe s en G et AB en H. Montrer que E est le milieu du segment GH si et seulement si G est le milieu du segment FH.

La ligne de puissance

1. Prenons trois cercles et leurs lignes de puissance deux à deux. Alors les trois droites se coupent soit en un seul point, soit elles sont parallèles.

2. Soit ABC un triangle aigu et soient M et N deux points arbitraires sur les côtés AB resp. AC. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent aux points P et Q. Montrer que P, Q et l'orthocentre du triangle ABC se trouvent sur la même droite.

3. Soient AD et BE les hauteurs dans le triangle ABC et soit $CA \neq CB$. Soit M le milieu du côté AB, H l'orthocentre du triangle ABC et D le point d'intersection de AB avec DE. Montrer que $DH \perp CM$.

La droite de Simson

1. Soient A, B, C, P, Q cinq points sur un cercle. Montrer que les deux droites de Simson de P et Q par rapport à $\triangle ABC$ se coupent en un angle qui est égal à l'angle inscrit interceptant l'arc PQ.

2. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit. Soient P, Q, R les projections de D sur les droites AB, BC resp. CA. Les bissectrices de $\angle ABC$ et $\angle CDA$ se coupent sur AC. Montrer que $RP = RQ$.

Céva et Ménélaüs

1. Dans le triangle ABC soient D, E, F les points de tangence au cercle inscrit se trouvant sur BC, CA resp. AB. Montrer que les droites AD, BE, CF se coupent en un seul point.

2. Soient A, B, C trois points sur une droite. Choisissons un point arbitraire D dans le plan et un autre point E sur DB. Alors le point d'intersection P de AC avec la droite passant par $AE \cap CD$ et $CE \cap AD$ ne dépend que de A, B et C.

3. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soient M, N, P, Q des points sur AB, BC, CD resp. DA. Montrer que MQ, NP, BD se coupent en un seul point si et seulement si MN, PQ, AC se coupent en un point.

4. Soient A, B, C trois points colinéaires et D, E, F également. Soient $G = BE \cap CF$, $H = AD \cap CF$ et $I = AD \cap BE$. Montrer que si $AI = HD$ et $CH = GF$, alors $BI = GE$.

Points spéciaux du triangle

Le centre de gravité

1. Dans un triangle deux médianes sont de longueur égale. Montrer qu'il s'agit d'un triangle isocèle.

2. Soit ABC un triangle et S son centre de gravité. Trouver le lieu géométrique caractérisant S quand on déplace C sur le cercle circonscrit de $\triangle ABC$.

Le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits

1. Soit ABC un triangle ayant pour aire A, pour périmètre P et pour rayon du cercle inscrit r. Montrer qu'alors $2A = r \cdot P$.
2. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 60°$. Soient I le centre du cercle inscrit et B', C' les points d'intersection de BI resp. CI avec AC resp. AB. Montrer que $IB' = IC'$.
3. Soit I le centre du cercle inscrit de $\triangle ABC$ avec $CA + AI = BC$. Trouver le rapport des angles $\angle BAC$ et $\angle CBA$.
4. Dans le triangle ABC soit H l'orthocentre. Soient M et K les milieux des segments AB resp. CH. Montrer que les deux bissectrices de $\angle CAH$ et $\angle CBH$ se coupent sur la droite MK.

Le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre

1. Soient H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs de $\triangle ABC$. Montrer que l'orthocentre H est le centre du cercle inscrit de $\triangle H_a H_b H_c$.
2. Soit $ABCD$ un carré unitaire et soient P et Q deux points dans le plan tels que Q est le centre du cercle circonscrit de $\triangle BPC$ et D le centre du cercle circonscrit de $\triangle PQA$. Trouver toutes les valeurs possibles pour la longueur du segment PQ.
3. Soit ABC un triangle. Un cercle arbitraire passant par B et C coupe les côtés AB et AC encore une fois en C' et B'. Soient H et H' les orthocentres des triangles ABC resp. $AB'C'$. Montrer que les droites BB', CC' et HH' se coupent en un point.

Quadrilatères circonscrits

1. Soient B et D deux points sur les côtés AC resp. AE du triangle ACE. Soit F le point d'intersection de CD et BE. Montrer que si $AB + BF = AD + DF$, alors $AC + CF = AE + EF$.
2. Soient A, B, C trois points sur le cercle k. Construire le point D sur k tel que $ABCD$ ait un cercle inscrit.

Exercices supplémentaires

1. Soit ABC un triangle et soient P, Q, R des points sur BC, CA resp. CR tels que AP, BQ et CR se coupent au point T. Montrer que
$$\frac{TP}{AP} + \frac{TQ}{BQ} + \frac{TR}{CR} = 1.$$
2. Deux cercles se coupent aux points M et N. Une des tangentes communes des deux cercles touche le premier cercle en P et le deuxième en Q. Montrer que les triangles MNP et MNQ ont la même aire.
3. Deux cercles k_1 et k_2 se coupent en A et B. Une droite arbitraire passant par B coupe k_1 et k_2 encore une fois en C resp. D. Les deux tangentes en C et D se coupent en M. Soit K le point d'intersection de AC avec la droite parallèle à CM passant par le point d'intersection de CD et AM. Montrer que BK est tangente à k_2.

4. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit convexe et P le point d'intersection de AB et CD. Montrer que

$$\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{AP}{BP}.$$

5. Soit k un cercle et A, B deux points sur k. Soient t_1 et t_2 les tangentes à k en A resp. B et P et Q des points sur t_1 resp. t_2 tels que $AP = BQ$ en tant que distances orientées. Montrer que le segment PQ coupe AB en deux.

6. On prend deux points K et L sur le segment AB tels que $AL^2 = AK \cdot AB$. Soit P un point quelconque dans le plan avec $AP = AL$. Montrer que PL est la bissectrice de $\angle KPB$.

7. Soit ABC un triangle quelconque. Dessinons les triangles isocèles DBC, AEC, ABF à l'extérieur de $\triangle ABC$ tels que AB, CA, AB soient leurs bases respectives. Montrer que les droites perpendiculaires à EF, FD, DE passant par A, B resp. C se coupent en un point.

8. Un hexagone convexe $ABCDEF$ est inscrit dans un cercle avec $AB = CD = EF$. De plus les diagonales AD, BE et CF se coupent en un point. Soit P le point d'intersection de AD et CE. Montrer que

$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2.$$