MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Geometria I - Caccia agli angoli

Daniel Sprecher

Aggiornato: 3 agosto 2021
vers. 1.0.0

Indice

1 Introduzione

Questo scritto dovrebbe fornire una prima idea sugli esercizi di geometria delle Olimpiadi della matematica. La teoria necessaria alla loro risoluzione non è né molta né difficile da capire, è anzi piuttosto intuitiva. La difficoltà degli esercizi risiede soprattutto nel costruire un approccio efficace, nel riconoscere l'essenziale in un disegno e nel combinare le informazioni trovate in modo da produrre una dimostrazione completa.

Qui assumeremo che il lettore sia familiare con la costruzione delle figure geometriche fondamentali (ad esempio il cerchio di Talete). In particolare, dovrebbero essere note l'esistenza, la costruzione e le caratteristiche più importanti dei seguenti punti speciali del triangolo: circocentro, incentro, ortocentro, baricentro (quali di questi punti possono giacere anche fuori dal triangolo? quale aspetto avrà in tal caso la figura?). Inoltre ci aspettiamo che risultati elementari come il teorema di Pitagora e concetti basilari come angolo acuto ($< 90°$) e angolo ottuso (compreso tra $90°$ e $180°$) siano pure conosciuti. In ciascun capitolo vi sono alcuni esempi e le relative soluzioni. Dovrebbero permettere di entrare nell'argomento e di vedere in azione i teoremi di cui parleremo.

2 Angoli nel triangolo

Iniziamo subito con il primo esempio.

Esempio 1 *Dimostrare che in un triangolo la somma degli angoli interni vale* $180°$.

Soluzione. Siano come al solito $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$ e sia g la retta parallela alla retta AB passante per il punto C (fig. 1). Osservando che i tre angoli in C insieme formano un angolo piatto, ricaviamo

$$\angle(g, CA) + \gamma + \angle(CB, g) = 180°.$$

Ora, l'angolo $\angle(g, CA)$ ha la stessa ampiezza di α e $\angle(CB, g) = \beta$, poiché essi sono angoli alterni interni alle parallele g e AB. Da questo otteniamo infine $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. $\square$

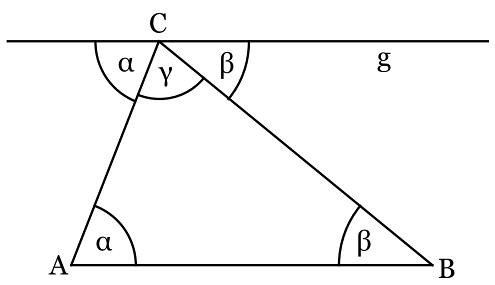

Figura 1: Soluzione dell'esempio 1

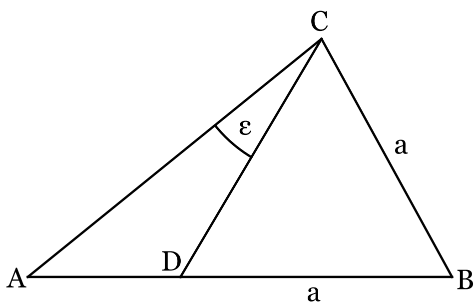

Figura 2: Esempio 2

Poiché è possibile scomporre ciascun n-gono convesso in $n-2$ triangoli, la somma degli angoli interni per un qualsiasi n-gono vale $(n-2) \cdot 180°$ (la dimostrazione si può rendere più rigorosa ricorrendo all'induzione).

Dall'esempio 1 segue immediatamente il **teorema dell'angolo esterno**. Ve ne potete convincere facilmente con l'aiuto di un disegno.

Teorema 2.1 (teorema dell'angolo esterno) *Un angolo esterno di un triangolo vale quanto la somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti.*

Esempio 2 *Nel triangolo ABC il lato AB sia più lungo del lato BC. Supponiamo che D giaccia sul segmento AB in modo tale che $BD = BC$ (fig. 2). Quanto vale $\epsilon = \angle ACD$, supponendo di sapere che $\angle BCA - \angle CAB = 30°$?*

Soluzione. Siano nuovamente α e γ gli angoli interni di $\triangle ABC$ in A e, rispettivamente, in C. L'angolo $\angle CDB$ è un angolo esterno di $\triangle ADC$ e perciò vale quanto la somma dei due angoli interni in A e C (fig. 3):

$$\angle CDB = \alpha + \epsilon. \tag{1}$$

Per ipotesi $\triangle BCD$ è isoscele, e ne segue che

$$\angle CDB = \angle BCD = \gamma - \epsilon. \tag{2}$$

Combinando ora le equazioni (1) e (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha + \epsilon = \angle CDB = \gamma - \epsilon \\ \Leftrightarrow \alpha + 2\epsilon = \gamma \\ \Leftrightarrow 2\epsilon = \gamma - \alpha = 30° \\ \Leftrightarrow \epsilon = 15° \end{aligned}$$

□

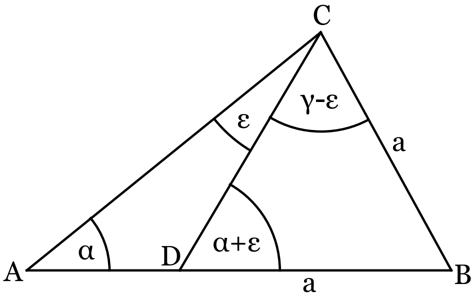

Figura 3: Soluzione dell'esempio 2

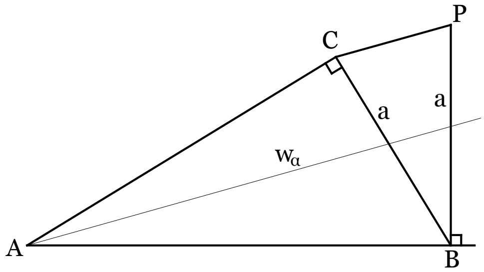

Figura 4: Esempio 3

La condizione supplementare dell'ultimo esempio appare a un primo sguardo piuttosto strana e non si capisce bene in che modo possa essere utilizzata. Ciò accade spesso e purtroppo non esiste alcuna ricetta su come si debba procedere. In questo esercizio abbiamo avuto successo semplicemente ignorando tale condizione all'inizio della soluzione. Solo dopo aver stabilito una connessione fra gli angoli coinvolti nell'esercizio $(\alpha, \gamma, \epsilon)$, è divenuto chiaro come sfruttare la condizione supplementare. A volte è però possibile scovare dalle condizioni poste dal problema alcuni indizi su come procedere verso la soluzione.

Esempio 3 *Sia ABC un triangolo rettangolo con ipotenusa AB (Fig. 4). Sia P un punto tale che le rette PB e AB siano perpendicolari e valga $PB = CB$. Dimostrare che la retta PC è perpendicolare oppure parallela alla bisettrice w_α dell'angolo $\alpha = \angle CAB$.*

Soluzione. Vi sono due punti i quali soddisfano la condizione imposta su P. Sia P_1 quello che giace dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB (fig. 5), e sia P_2 quello che giace dalla parte opposta rispetto alla retta AB(fig. 6).

Poiché vale $\gamma = 90°$, c'è una relazione diretta tra α e β:

$$\beta = 90° - \alpha$$

e dunque abbiamo

$$\angle CBP_1 = \alpha.$$

Il triangolo BP_1C è per ipotesi isoscele, e ne ricaviamo che

$$\angle BP_1C = \angle P_1CB.$$

Per la somma degli angoli in questo triangolo otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha + 2 \cdot \angle P_1CB &= 180° \\ \Leftrightarrow \quad \angle P_1CB &= 90° - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Sia Q il punto di intersezione di w_α e CB. Siccome sussiste l'uguaglianza $\angle CAQ = \frac{\alpha}{2}$, abbiamo che

$$\angle AQC = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle P_1CB.$$

Gli angoli $\angle AQC$ e $\angle P_1CB$ sono dunque alterni interni e di conseguenza w_α e P_1C sono parallele.

Consideriamo ora la situazione nel caso di P_2. Vale $\angle P_2BC = 180° - \alpha$ e perciò

$$\angle BCP_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Sia ora R il punto di intersezione di w_α con CP_2. Nel triangolo $\triangle QCR$ vale

$$\angle QCR + \angle RQC = \angle BCP_2 + (90° - \angle CAQ) = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°.$$

Dunque abbiamo che $\angle CRQ = 90°$ e $w_\alpha \perp CP_2$. □

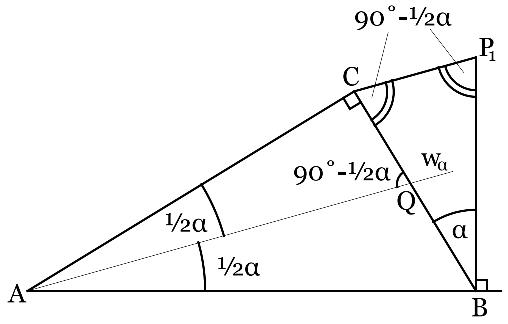

Figura 5: Soluzione dell'esempio 3, caso 1

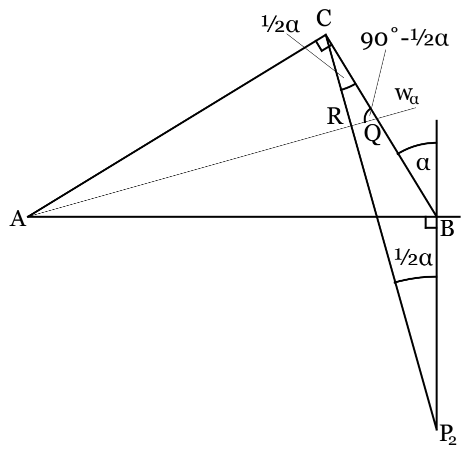

Figura 6: Soluzione dell'esempio 3, caso 2

Questo esempio mostra bene che cosa s'intende per caccia agli angoli. Dapprima si pone un angolo come perno e gli si dà un nome (qui: $\angle CAB \doteq \alpha$), dopodiché tutti gli angoli nella figura vengono espressi in funzione di quest'angolo (ad esempio $\angle AQC = 90° - \frac{\alpha}{2}$). In questo modo l'intera figura è determinata, quando α è determinato. In altri problemi è a volte necessario introdurre più di un perno.

3 Angoli nel cerchio

Sia O il centro di un cerchio e siano A e B due punti sulla circonferenza. L'angolo $\angle AOB$ viene chiamato **angolo al centro** intercettante l'arco/insistente sull'arco $\widehat{AB}$. Ricordate che per l'arco $\widehat{AB}$ vi sono sempre due possibilità: in un caso vale $\angle AOB \leq 180°$ e nell'altro $\angle AOB \geq 180°$. Solitamente è chiaro dal contesto di quale delle due possibilità si stia parlando, tuttavia è meglio dichiararlo espressamente (come nel teorema seguente).

Teorema 3.1 (teorema angolo al centro-angolo alla circonferenza) *Sia O il circocentro di un triangolo qualsiasi ABC con $\angle BAC = \alpha$. Allora l'angolo al centro insistente su $\widehat{BC}$ e che non contiene il punto A vale 2α.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema solo nel caso in cui $\triangle ABC$ è acutangolo (fig. 7); l'altro caso funziona analogamente. Poiché $\triangle ABC$ è acutangolo, O giace all'interno del triangolo $\triangle ABC$ e possiamo scomporre $\angle BAC$ in due angoli più piccoli ponendo $\alpha_1 = \angle OAB$ e $\alpha_2 = \angle CAO$. Essendo O il circocentro, i triangoli $\triangle OAB$ e $\triangle OCA$ sono isosceli, cioè

$$\angle ABO = \alpha_1 \quad \angle OCA = \alpha_2.$$

Prolungando la retta AO e facendola intersecare con il cerchio circoscritto in D, osserviamo che $\angle DOB$ è un angolo esterno di $\triangle OAB$ e che $\angle COD$ lo è di $\triangle OCA$. Grazie al

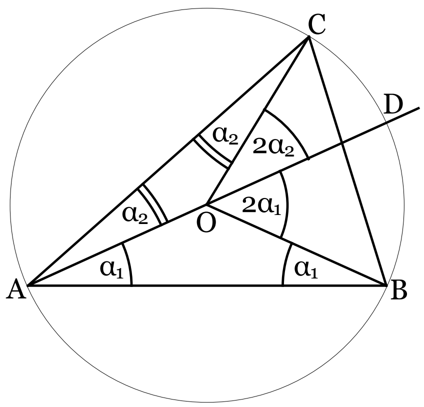

Figura 7: Teorema angolo al centro-angolo alla circonferenza

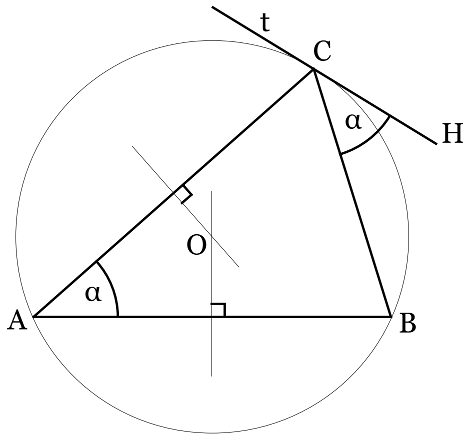

Figura 8: Teorema dell'angolo tangente

teorema dell'angolo esterno otteniamo allora

$$\angle COB = \angle COD + \angle DOB = 2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha.$$

$\square$

Analogamente all'angolo al centro, l'angolo $\angle BAC$ (fig. 7) viene detto **angolo alla circonferenza** insistente sull'arco $\widehat{BC}$. Riflettendo ora su che cosa accade all'ampiezza dell'angolo $\angle BAC$, qualora A venga spostato sulla circonferenza, è immediato giungere al prossimo teorema.

Teorema 3.2 (teorema dell'angolo alla circonferenza) *Sia $\widehat{BC}$ un arco qualsiasi sulla circonferenza k. Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su $\widehat{BC}$ hanno la stessa ampiezza.*

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la fig. 7 e scegliamo l'arco $\widehat{BC}$ contenente D. L'angolo al centro COB è chiaramente indipendente dalla scelta di A. Grazie al teorema angolo al centro-angolo alla circonferenza deduciamo che anche l'ampiezza $\angle CAB$ rimane costante, fintantoché A non cambia lato rispetto alla retta BC. $\square$

Teorema 3.3 (teorema dell'angolo tangente) *Nel triangolo qualsiasi ABC siano k la circonferenza circoscritta e O il suo centro. Sia t la tangente a k in C (fig. 8). Il punto C spezza t in due semirette; scegliamo un punto ausiliario qualsiasi H giacente sulla semiretta che si trova dal lato opposto a quello di A rispetto a BC. Vale che $\angle BAC = \angle BCH$.*

Dimostrazione. (Fig. 9) Mediante il teorema angolo al centro-angolo alla circonferenza ricaviamo

$$\angle BOC = 2\alpha.$$

Il triangolo $\triangle OBC$ è isoscele e perciò possiamo calcolare $\angle OCB$ sfruttando la somma degli angoli interni:

$$\angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Ricordiamo inoltre che le tangenti sono perpendicolari ai propri raggi, cioè $\angle OCH = 90^\circ$. Il passo conclusivo non è ora molto difficile:

$$\angle BCH = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

□

Il teorema dell'angolo tangente è molto utile in esercizi complessi, poiché consente di calcolare angoli posti su una circonferenza senza doverne introdurre il centro. Il disegno rimane così più ordinato e pulito. Presentiamo subito un esempio che dovrebbe chiarire quanto appena detto.

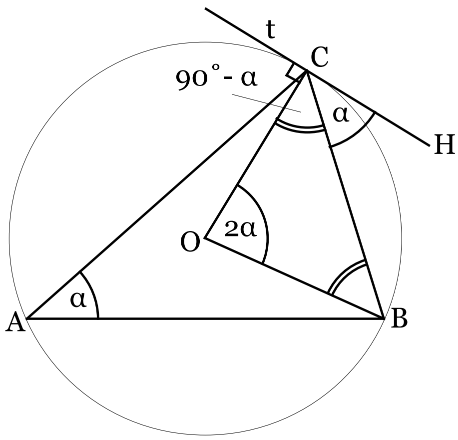

Figura 9: Dimostrazione del teorema dell'angolo al centro

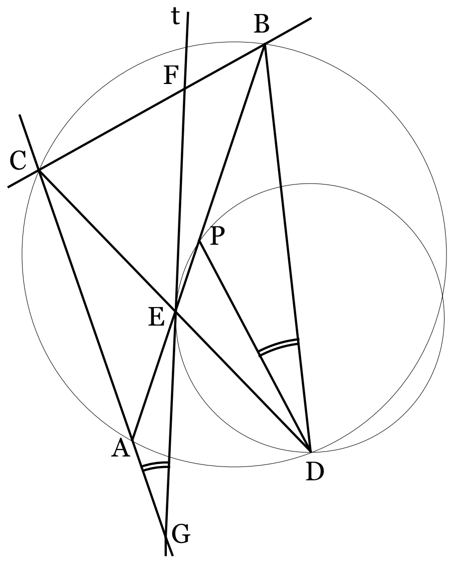

Figura 10: Esempio 4

Esempio 4 *Le due corde AB e CD si intersecano all'interno del cerchio in E (fig. 9). Sia P un punto qualsiasi sul segmento BE. La tangente t, passante per E, al cerchio circoscritto al triangolo $\triangle DPE$ interseca la retta BC in F e la retta AC in G. Dimostrare che $\angle FGC = \angle BDP$.*

Soluzione. (Fig. 11) Innanzitutto poniamo

$$\angle EPD = \alpha, \quad \angle ACE = \beta$$

(la scelta di quali angoli sostituire non è così importante).

Ora possiamo ricavare altri angoli. Grazie al teorema dell'angolo tangente abbiamo

$$\angle GED = \alpha$$

il quale è un angolo esterno di $\triangle ECG$. Così otteniamo direttamente

$$\angle FGC = \alpha - \beta.$$

Per il teorema dell'angolo alla circonferenza vale poi

$$\angle ABD = \beta$$

e sfruttando l'angolo esterno $\angle EPD = \alpha$ di $\triangle BDP$ ricaviamo

$$\angle BDP = \alpha - \beta$$

che è dunque uguale $\angle FGC$. $\square$

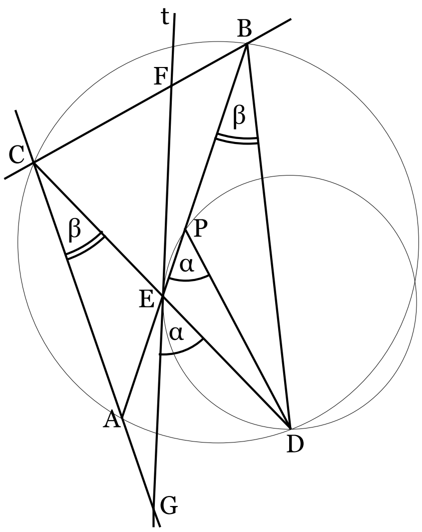

Figura 11: Soluzione dell'esempio 4

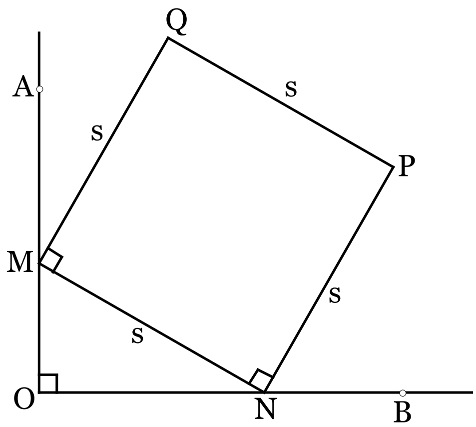

Figura 12: Esempio 5

La soluzione di questo esercizio appare piuttosto semplice, tuttavia è facile perdersi tra le molte rette e i molti cerchi. Una delle maggiori difficoltà in geometria sta nel mantenere costantemente uno sguardo d'insieme sul disegno. La pazienza di costruire con riga e compasso un grande disegno ripaga molto spesso dello sforzo!

Nella soluzione di questo problema abbiamo inizialmente sostituito due angoli (α e β). Volendo determinare tutti gli angoli nella figura, occorrerebbero altri perni. Provate come esercizio a determinare tutti gli angoli nella figura. Quanti angoli devono venire sostituiti al minimo?

Risposta: la figura ha quattro gradi di libertà (se si ignorano traslazioni, riscalamenti e rotazioni); con quattro perni è possibile esprimere tutti gli angoli rimanenti nella figura.

Esempio 5 *Sia $\angle AOB$ un angolo retto e siano M un punto sulla semiretta OA e N un punto sulla semiretta OB (fig. 12). Completiamo M e N in un quadrato $MNPQ$ in modo tale che P giaccia dal lato opposto a quello di O rispetto a MN. Trovare il luogo geometrico determinato dal centro del quadrato al variare di M e N sulle rispettive semirette.*

Soluzione. Disegniamo innanzitutto entrambe le diagonali del quadrato e chiamiamo il loro punto d'intersezione D (fig. 13). A colpo d'occhio ci si aspetterebbe che P si possa muovere su una superficie infinita come P e Q. Ora dimostreremo che ciò è falso.

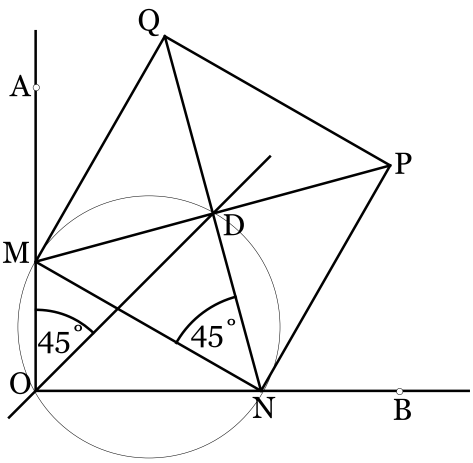

Figura 13: Soluzione 5, prima parte

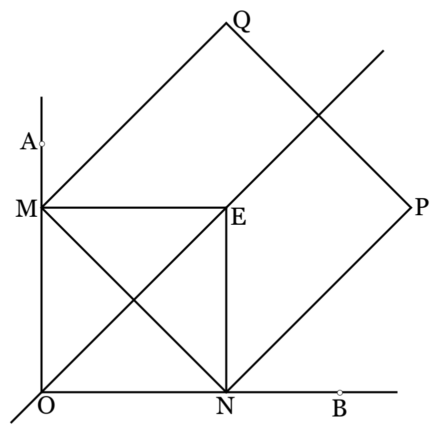

Figura 14: Soluzione 5, seconda parte

Entrambi gli angoli $\angle MON$ e $\angle MDN$ sono rettangoli e dunque ha senso costruire il **cerchio di Talete** relativo al segmento MN. I punti O e D giacciono infatti ambedue su tale cerchio. Poiché $MNPQ$ è un quadrato, abbiamo inoltre che $\angle DNM = 45°$. Per il teorema dell'angolo alla circonferenza vale allora $\angle DOM = \angle DNM = 45°$. Ne concludiamo che il centro del quadrato giace sulla bisettrice dell'angolo $\angle AOB$ indipendentemente dalla scelta di M e N.

Non abbiamo però ancora finito, poiché ci resta da dimostrare che ciascun punto appartenente alla bisettrice è il centro di qualche quadrato. Per farlo scegliamo un qualsiasi punto E sulla bisettrice di $\angle AOB$ e disegnamo il quadrato $MONE$ con M su OA e N su OB (fig. 14). Se ora disegniamo il quadrato $MNPQ$, è facile notare che E ne è il centro. Questo mostra che il centro del quadrato può muoversi su tutta la bisettrice (qui una semiretta) dell'angolo $\angle AOB$. $\square$

4 Quadrilateri ciclici

Siamo dunque giunti al capitolo più importante, considerando che i quadrilateri ciclici appaiono in quasi tutti i problemi delle Olimpiadi. Un quadrilatero ciclico è un quadrilatero convesso i cui vertici giacciono tutti su una circonferenza. Studiamo come prima cosa una loro importante caratteristica.

Teorema 4.1 *In un quadrilatero ciclico $ABCD$ la somma di due angoli opposti vale sempre $180°$.*

Dimostrazione. Avendo a che fare con quadrilateri ciclici, è spesso consigliabile disegnare entrambe le diagonali e scomporre così gli angoli (fig. 15). Chiamiamo allora $\angle CAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$; per il teorema dell'angolo alla circonferenza abbiamo

$$\angle CBD = \alpha, \quad \angle BDC = \beta$$

e grazie alla somma degli angoli interni $\triangle BCD$ anche

$$\angle BCD = 180° - \alpha - \beta = 180° - \angle BAD$$

□

Va bene, fin qui nulla di estremamente spettacolare. Strabiliante è il fatto anche l'inversione di questo teorema è vera!

Teorema 4.2 *Siano A, B, C, D quattro punti, i quali costituiscono in quest'ordine un quadrilatero convesso. Se vale $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, allora i quattro punti giacciono su una circonferenza.*

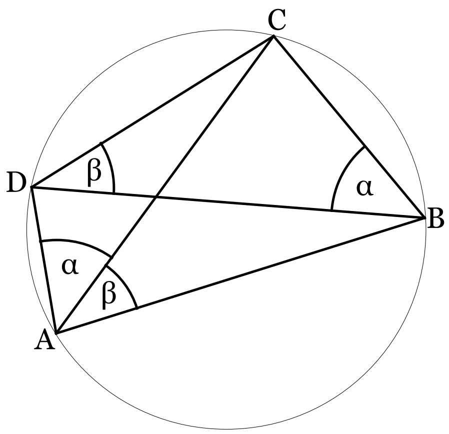

Figura 15: Dimostrazione del teorema 5

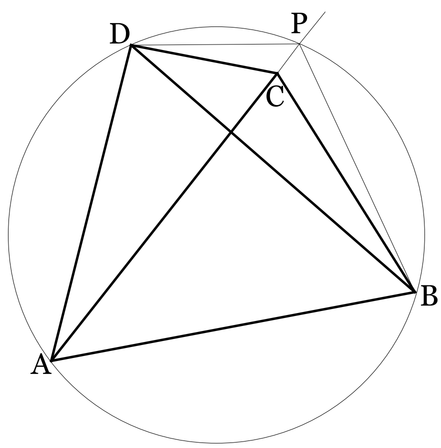

Figura 16: Dimostrazione del teorema 6

Dimostrazione. (fig. 16) Disegniamo dapprima la circonferenza circoscritta k di $\triangle ABD$. Supponiamo che C non appartenga a k. Se quest'ipotesi ci conduce a una contraddizione, il teorema è dimostrato. Consideriamo dapprima il caso in cui C giace all'interno del cerchio k.

Sia P il punto di intersezione della retta AC con k. Poiché $ABPD$ è ciclico, sappiamo che (v. teorema 4.1)

$$\angle BAD + \angle BPD = 180°.$$

Se ora riuscissimo a dimostrare che l'angolo $\angle BCD$ è maggiore di $\angle BPD$, avremmo ottenuto la contraddizione desiderata, poiché in tal caso la somma $\angle BAD + \angle BCD$ non potrebbe valere anch'essa 180°, ma ciò è vero per ipotesi. Intuitivamente è chiaro che nella fig. 16 vale $\angle BCD > \angle BPD$; si può dimostrarlo come segue:

Poiché C deve trovarsi all'interno del triangolo BDP, abbiamo $\angle CBD < \angle PBD$ e $\angle CDB < \angle PDB$. Perciò otteniamo facilmente che

$$\angle BCD = 180° - \angle CBD - \angle CDB > 180° - \angle PBD - \angle PDB = \angle BPD.$$

Il caso in cui C giace all'esterno di k funziona in modo totalmente analogo. $\square$

L'argomento qui utilizzato lascia a un primo sguardo un'impressione poco pulita, eppure questa tecnica di dimostrazione ha addirittura un nome. La si chiama "Working Backwards" e appare piuttosto spesso. Vale dunque la pena di ricordarsela.

Peraltro abbiamo già incontrato un semplice esercizio con un quadrilatero ciclico già incontrato. Nell'esempio 5 abbiamo disegnato il cerchio di Talete, poiché in quel caso entrambi gli angoli opposti valevano 90°. Per concludere proponiamo ancora un esempio difficile, nel quale è cruciale scovare i quadrilateri ciclici.

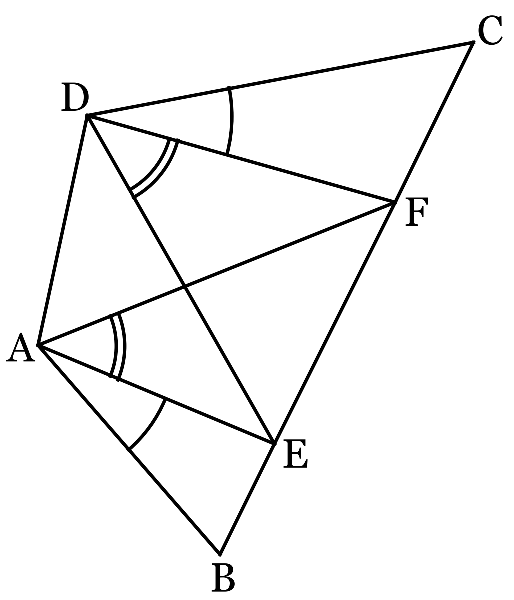

Figura 17: Esempio 6

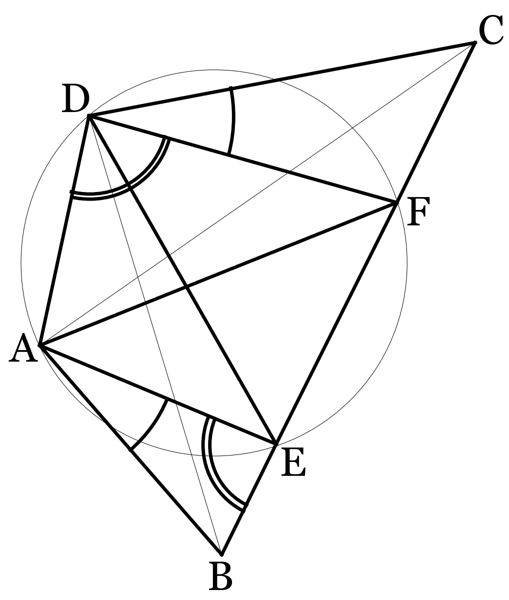

Figura 18: Soluzione dell'esempio 6

Esempio 6 *I punti E e F giacciono sul segmento BC del quadrilatero convesso $ABCD$, laddove E è più vicino a B di F (fig. 17). Vale che $\angle BAE = \angle CDF$ e $\angle EAF = \angle FDE$.*

Dimostrare che $\angle FAC = \angle EDB$.

Soluzione. (fig. 18) In problemi come questo ci si perde spesso facilmente fra innumerevoli rette e angoli ausiliari. Vale dunque la pena di prendersi del tempo per uno schizzo ben fatto. Io comincio spesso col disegnare accuratamente i dati del problema utilizzando una penna; in seguito disegno il resto con una matita, calcando i tratti più o meno intensamente secondo la loro importanza. Questo concede il vantaggio di poter cancellare alcuni tratti senza dover ricominciare tutto daccapo.

Ciò che salta all'occhio in questo esercizio è il fatto che i due angoli insistenti sul segmento EF hanno la stessa ampiezza: una situazione che ricorda il teorema dell'angolo alla circonferenza! Mediante la sua inversione possiamo concludere che $AEFD$ deve essere un quadrilatero ciclico. L'inversione del teorema dell'angolo alla circonferenza può essere dimostrata ricorrendo come nel teorema 6 al metodo del "Working Backwards", tuttavia si tratta di un risultato ben noto e ne tralasciamo dunque la dimostrazione.

Ora viene la parte difficile dell'esercizio. Abbiamo trovato un quadrilatero ciclico e dobbiamo ora capire in che modo sfruttare la seconda ipotesi. Come è possibile combinare le due cose? Se non si riesce a trovare nulla, il seguente ragionamento costituisce spesso un aiuto all'ispirazione:

Supponiamo che quanto vogliamo mostrare sia vero (in questo caso $\angle FAC = \angle EDB$). Che cosa ne segue? Sfruttando l'ipotesi e l'inversione del teorema dell'angolo alla circonferenza, deduciamo che $ABCD$ è ciclico. Quest certamente non costituisce ancora una dimostrazione, ma adesso siamo sicuri che sia così! Proviamo ora a provarlo partendo dalle ipotesi. Invertendo il ragionamento precedente possiamo concludere l'esercizio. Dimostriamo che $ABCD$ è ciclico mostrando che vale $\angle ADC + \angle ABC = 180°$.

$$\angle ABC = 180° - \angle BEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle BAE$$

Per il passo seguente abbiamo bisogno dapprima dell'ipotesi $\angle BAE = \angle CDF$, e in seguito del fatto che $AEFD$ è ciclico.

$$\angle ABC = \angle CEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle CDF = 180° - \angle FDA - \angle CDF = 180° - \angle ADC$$

$ABCD$ è quindi effettivamente un quadrilatero ciclico; da questo segue piuttosto rapidamente quel che cerchiamo:

$$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB$$

□