Geometrie I - Tipps

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Winkel im Dreieck

Einstieg

1.1 Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$, in welchem die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ senkrecht auf AC steht. Zeige, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Tipp: Berechne die Winkel bei B und C.

Fortgeschritten

1.2 Sei ABC ein Dreieck mit $AB > AC$. Die Winkelhalbierende des Aussenwinkels bei C schneide die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ in D. Die Parallele zu BC durch D schneide CA in L und AB in M.
Zeige, dass $LM = BM - CL$ gilt.

Tipp: Zeige $BM = DM$ und $CL = DL$.

2 Winkel im Kreis

Einstieg

2.1 Die Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis. Berechne den Winkel $\angle DBA$, wenn gegeben ist:

(a) $\angle DCA = 56° \implies \mathbf{56°}$

(b) $\angle CBD = 39°$, $\angle ADC = 121° \implies \mathbf{20°}$

(c) $\angle CBA = 91°$, $\angle CAD = 13° \implies \mathbf{78°}$

(d) $\angle ADB = 41°$, $\angle DCB = 103° \implies \mathbf{62°}$

(e) $\angle BAD = 140°$, $\angle ACB = 17° \implies \mathbf{23°}$

2.2 Sei ABC ein Dreieck und P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und dem Umkreis des Dreiecks ABC. Zeige, dass BPC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Tipp: Was kann mit dem Peripheriewinkelsatz über die Winkel $\angle PBC$ und $\angle BCP$ ausgesagt werden?

2.3 Sei $ABCD$ ein Viereck mit $\angle BAD = 131°$, $\angle DBA = 17°$ und $\angle ACB = 32°$. Wie gross ist $\angle DCA$?

Tipp: Versuche zuerst zu begründen, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

2.4 Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k und Umkreismittelpunkt O. Bezeichne mit t die Tangente an k in A. Sei s die Spiegelung der Geraden AB an t. Zeige, dass s eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABO ist.

Tipp: Versuche zu zeigen, dass der von s und AB eingeschlossene Winkel gleich gross ist wie $\angle AOB$. Die Aussage folgt dann mit der Umkehrung des Tangentenwinkelsatzes.

2.5 Seien A und B zwei verschiedene Punkte und k der Kreis mit Durchmesser AB. Begründe, weshalb die Peripheriewinkel über der Strecke AB alle $90°$ betragen. (Einen solchen Kreis nennt man den *Thaleskreis* über der Strecke AB.)

Tipp: Benutze den Mittelpunktswinkelsatz (wie gross ist der Mittelpunktswinkel?).

Fortgeschritten

2.6 Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Gerade CI schneide den Umkreis des Dreiecks ABI ein weiteres Mal in D und AI schneide den Umkreis des Dreiecks BCI ein weiteres Mal in E.
Zeige, dass die Punkte D, E und B auf einer Geraden liegen.

Tipp: Bestimme die Winkel $\angle ABD$ und $\angle EBC$ in Abhängigkeit von α, β und γ (definiert wie üblich) und zeige dann, dass $\angle EBC + \angle CBA + \angle ABD = 180°$ gilt.

2.7 Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt der Hypotenuse AB. Zeige, dass $AM = BM = CM$ gilt.

Tipp: Beobachte, dass C auf dem Thaleskreis über AB liegt. Daraus folgt, dass M der Mittelpunkt dieses Kreises ist. Wieso folgt nun $AM = BM = CM$?

Olympiade

2.8 Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse AB, H der Höhenfusspunkt der Höhe durch C und W der Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$. Zeige, dass $\angle HCW = \angle WCM$ gilt.

Tipp: Benutze 2.7 und überlege, wie die Aussage in Winkeln ausgedrückt werden kann.

2.9 Die Schwerelinien AA', BB' und CC' im Dreieck ABC schneiden den Umkreis des Dreiecks ABC weitere Male in den Punkten A_0, B_0 respektive C_0 (Diese Formulierung bedeutet automatisch, dass A', B' und C' die entsprechenden Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC sind). Nehme an, der Schwerpunkt S halbiere die Strecke AA_0. Zeige, dass dann $A_0B_0C_0$ ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Tipp: Es ist bekannt, dass der Schwerpunkt die Schwerelinien im Verhältnis 2:1 teilt. Es gilt also $SA_0 = AS = 2SA'$, folglich halbiert A' die Strecke SA_0. Nun gilt $SA' = A'A_0$ und $A'B = A'C$, daher ist SBA_0C ein Parallelogramm. Versuche jetzt, die Winkel $\angle C_0B_0A_0$ und $\angle A_0C_0B_0$ in Abhängigkeit der Winkel im Parallelogramm auszudrücken (Peripheriewinkelsatz!).

3 Sehnenvierecke

Einstieg

3.1 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und den Höhenfusspunkten H_A, H_B und H_C. Zeige, dass AH_CHH_B und BCH_BH_C Sehnenvierecke sind.

Tipp: Finde jeweils zwei gegenüberliegende Winkel, die sich auf 180° ergänzen.

Fortgeschritten

3.2 Sei ABC ein Dreieck und seien D, E und F Punkte auf den Seiten BC, CA respektive AB. Bezeichne mit P den zweiten Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke FBD und DCE. Zeige, dass $AFPE$ ein Sehnenviereck ist.

Tipp: Zeige $\angle PFA = \angle PDB$ und $\angle PDB = \angle PEC$.

3.3 Sei $ABCD$ ein Rechteck und M der Mittelpunkt der Seite AB. Sei P die Projektion von C auf die Gerade MD (d.h. P liegt so auf MD, dass CP und MD senkrecht aufeinander stehen). Zeige, dass PBC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

Tipp: Zeige, dass $MBCP$ ein Sehnenviereck ist und benutze $\angle DMA = \angle BMC$.

3.4 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und den Höhenfusspunkten D, E und F. Zeige, dass H der Inkreismittelpunkt des Dreiecks DEF ist.

Tipp: Finde möglichst viele Sehnenvierecke und zeige dann $\angle EDH = \angle HDF$ mit dem Peripheriewinkelsatz (angewendet in mehreren Sehnenvierecken).

3.5 Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, in welchem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen (*konvex* bedeutet für n-Ecke, dass alle Innenwinkel $\leq 180°$ sind). Bezeichne mit P den Diagonalenschnittpunkt. Zeige, dass die vier Projektionen von P auf die Geraden AB, BC, CD und DA ein Sehnenviereck bilden.

Tipp: Seien E, F, G und H die Projektionen auf die Geraden AB, BC, CD und DA. Finde möglichst viele Sehnenvierecke und zeige dann $\angle FEP = \angle 90° - \angle PGF$ und $\angle PEH = 90° - \angle HGP$.

3.6 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Weiter sei M der Mittelpunkt der Strecke AH und N der Mittelpunkt der Strecke BC.
Zeige, dass die drei Höhenfusspunkte auf dem Thaleskreis über MN liegen.
Wieso impliziert dies, dass die drei Höhenfusspunkte, die drei Seitenmittelpunkte und die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH alle auf einem Kreis liegen? (Diesen Kreis nennt man den *Feuerbachkreis* oder auch *Neun-Punkte-Kreis*.)

Tipp: Seien D, E und F die Höhenfusspunkte auf den Seiten BC, CA und AB. Wegen $\angle MDN = 90°$ liegt D auf dem Thaleskreis über MN. Für E und F gibt es mehr zu tun. Stelle zuerst fest, dass E und F auf den Thaleskreisen über AH und BC liegen. M und N sind die Mittelpunkte dieser Thaleskreise, also gilt $AM = HM = EM = FM$ und $BN = CN = EN = FN$. Nun gilt:

$$\angle NFC + \angle CFN = \angle FCN + \angle MHF = \angle HCD + \angle DHC = 180° - \angle CDH = 90°.$$

Zum zweiten Teil: Wir haben gezeigt, dass M und N auf dem Umkreis des Dreiecks EDF liegen. Genau gleich können wir auch zeigen, dass die Seitenmittelpunkte von CA und AB sowie die Mittelpunkte der Strecken BH und CH auf diesem Umkreis liegen.

Olympiade

3.7 Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf dem Kreis k. Der Punkt C liege auf der Tangente an k durch B und es gelte $AB = AC$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit AC sei D. Angenommen, der Punkte D liege im Innern von k. Zeige, dass $\angle ABC > 72°$ gilt.

Tipp: Sei $\angle ABC = \beta$. Sei P ein beliebiger Punkt auf dem Kreis k, der auf der anderen Seite von AB liegt als C. Nach dem Tangentenwinkelsatz gilt $\angle APB = \beta$. Sei nun Q ein Punkt auf dem Kreis k, der auf derselben Seite von AB liegt wie C. $AQBP$ ist ein Sehnenviereck, also gilt $\angle BQA = 180° - \beta$. Beachte nun, dass D genau dann im Innern von k liegt, wenn $\angle BDA > \angle BQA$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\frac{3}{2}\beta > 180° - \beta$, da $\angle BDA = \angle DBC + \angle BCD = \frac{3}{2}\beta$. Umformen der Ungleichung liefert nun $\beta > 72°$.

3.8 Zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 respektive M_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Gerade M_1B schneide k_2 in $F \neq B$ und M_2B schneide k_1 in $E \neq B$. Die Parallele zu EF durch B schneide k_1 und k_2 in den weiteren Punkten P respektive Q.

(a) Zeige, dass B der Inkreismittelpunkt des Dreiecks AEF ist.

(b) Zeige, dass $PQ = AE + AF$ gilt.

Tipp:

(a) Beobachte, dass $M_1A = M_1B = M_1E$ und $M_2A = M_2B = M_2F$ gilt und dass der Mittelpunktswinkelsatz angewendet werden kann. Zeige nun mit Winkeljagd, dass M_1AFE und AM_2FE Sehnenvierecke sind (daraus folgt sofort, dass M_1, A, M_2, F und E auf einem Kreis liegen). Der Rest ist auch wieder Winkeljagd.

(b) Sei S der Schnittpunkt von PB und AE. Zeige, dass PAS und SBE gleichschenklige Dreiecke sind. Hieraus folgt, dass $PB = AE$ gilt. Zeige $BQ = AF$ analog.