Géométrie I - Indications

Actualisé: 15 octobre 2016
vers. 1.0.0

1 Angles dans le triangle

Mise en jambes

1.1 Soit ABC un triangle avec $AB = AC$, dans lequel la bissectrice de $\angle ABC$ coupe perpendiculairement AC. Montrer que ABC est équilatéral.
Indication : Déterminer les angles en B et C.

Avancé

1.2 Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. La bissectrice de l'angle extérieur en C coupe la bissectrice de $\angle ABC$ en D. La parallèle à BC passant par D coupe CA en L et AB en M.
Montrer que $LM = BM - CL$.
Indication : Montrer que $BM = DM$ et que $CL = DL$.

2 Angles dans le cercle

Mise en jambes

2.1 Les points A, B, C et D se trouvent dans cet ordre sur un cercle. Calculer l'angle $\angle DBA$ dans les cas suivants :
(a) $\angle DCA = 56° \implies$ **56°**
(b) $\angle CBD = 39°$, $\angle ADC = 121° \implies$ **20°**
(c) $\angle CBA = 91°$, $\angle CAD = 13° \implies$ **78°**
(d) $\angle ADB = 41°$, $\angle DCB = 103° \implies$ **62°**
(e) $\angle BAD = 140°$, $\angle ACB = 17° \implies$ **23°**

2.2 Soit ABC un triangle et P le deuxième point d'intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que BPC est un triangle isocèle.
Indication : Que peut-on dire de $\angle PBC$ et de $\angle BCP$ à l'aide du théorème de l'angle périphérique ?

2.3 Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $\angle BAD = 131°$, $\angle DBA = 17°$ et $\angle ACB = 32°$. Combien vaut $\angle DCA$?

Indication : Montrer premièrement que $ABCD$ est un quadrilatère inscrit.

2.4 Soit ABC un triangle avec k son cercle circonscrit, de centre O. Soit t la tangente à k au point A. Soit s la réflexion de la droite AB par rapport à t. Montrer que s est une tangente au cercle circonscrit au triangle ABO.

Indication : Essayer de montrer que l'angle entre s et AB est égal à $\angle AOB$. La fin de la preuve est ensuite une conséquence d'un théorème relatif aux tangentes.

2.5 Soient A et B deux points distincts et k le cercle ayant pour diamètre AB. Prouver que les tous les angles inscrits regardant AB valent $90°$. (Un tel cercle est appelé *cercle de Thalès* du segment AB.)

Indication : Penser à la médiatrice.

Avancé

2.6 Soit ABC un triangle avec I son centre du cercle inscrit. La droite CI coupe le cercle circonscrit du triangle ABI une deuxième fois en D et AI coupe le cercle circonscrit du triangle BCI une deuxième fois en E.

Montrer que les points D, E et B sont alignés.

Indication : Déterminer les angles $\angle ABD$ et $\angle EBC$ en fonction de α, β et γ (définis usuellement) et montrer ensuite que $\angle EBC + \angle CBA + \angle ABD = 180°$.

2.7 Soit ABC un triangle rectangle et M le milieu de l'hypoténuse AB. Montrer que $AM = BM = CM$.

Indication : Remarquer que C se trouve sur le cercle de Thalès de AB. Quel rôle joue alors M ?

Olympiade

2.8 Dans un triangle rectangle ABC, soit M le milieu de l'hypoténuse AB, H le pied de la hauteur issue de C et W le point d'intersection de AB avec la bissectrice de $\angle ACB$. Montrer que $\angle HCW = \angle WCM$.

Indication : Regarder le résultat 2.7 et y réfléchir en termes d'angles.

2.9 Les médianes AA', BB' et CC' du triangle ABC coupent le cercle circonscrit du triangle ABC une deuxième fois aux points A_0, B_0 respectivement C_0 (Cette formulation veut automatiquement dire que A', B' et C' sont les points milieux des côtés du triangle ABC). Supposons que le centre de gravité S est le milieu du segment AA_0. Montrer alors que $A_0B_0C_0$ est un triangle isocèle.

Indication : Il est connu que le centre de gravité partage les médianes dans un rapport 2 :1. Il est aussi vrai que $SA_0 = AS = 2SA'$, ainsi A' est le milieu de SA_0. En outre, $SA' = A'A_0$ et $A'B = A'C$, donc SBA_0C est un parallélogramme. Essayer maintenant de déterminer $\angle C_0B_0A_0$ et $\angle A_0C_0B_0$ en fonction des angles du parallélogramme (Angle périphérique !).

3 Quadrilatères inscrits

Mise en jambes

3.1 Soit ABC un triangle avec H son orthocentre et H_A, H_B et H_C les pieds de ses hauteurs. Montrer que AH_CHH_B et BCH_BH_C sont des quadrilatères inscrits.
Indication : Trouver deux angles opposés dont la somme vaut 180°.

Avancé

3.2 Soit ABC un triangle et soient D, E et F des points sur les côtés BC, CA respectivement AB. Définissons P comme le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits des triangles FBD et DCE. Montrer que $AFPE$ est un quadrilatère inscrit.
Indication : Montrer que $\angle PFA = \angle PDB$ et que $\angle PDB = \angle PEC$.

3.3 Soit $ABCD$ un rectangle et M le milieu du côté AB. Soit P la projection de C sur la droite MD (c-à-d. P se trouve sur MD de telle sorte que CP et MD soient perpendiculaires).
Montrer que PBC est un triangle isocèle.
Indication : Montrer que $MBCP$ est un quadrilatère inscrit et utiliser que $\angle DMA = \angle BMC$.

3.4 Soit ABC un triangle avec son orthocentre H et ses pieds des hauteurs D, E et F. Montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle DEF.
Indication : Trouver le plus de quadrilatère inscrit (!) et montrer que $\angle EDH = \angle HDF$ avec plusieurs applications du théorème de l'angle périphérique.

3.5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les diagonales se coupent perpendiculairement (*convexe* signifie, pour un n-gone, que tous les angles intérieurs soient $\leq 180°$). Posons P l'intersection des diagonales. Montrer que les quatre projections de P sur les droites AB, BC, CD et DA forment un quadrilatère inscrit.
Indication : Soient E, F, G et H les projections sur les droites AB, BC, CD et DA. Trouver le plus de quadrilatères inscrits et montrer ensuite que $\angle FEP = \angle 90° - \angle PGF$ et que $\angle PEH = 90° - \angle HGP$.

3.6 Soit ABC un triangle avec H son orthocentre. Ensuite, soit M le milieu du segment AH et N le milieu du segment BC.
Montrer que les 3 pieds des hauteurs du triangle ABC se trouvent sur le cercle de Thalès du segment MN.
Comment cela implique-t-il que les trois pieds des hauteurs de ABC, les trois milieux des côtés de ABC et les milieux des segments AH, BH et CH se trouvent tous sur un cercle ? (On appelle ce cercle le *cercle de Feuerbach* ou aussi *cercle des* 9 *points*.)
Indication : Soient D, E et F les pieds des hauteurs sur BC, CA et AB. Parce que $\angle MDN = 90°$, D se trouve sur le cercle de Thalès de MN. Pour E et F il y a plus à faire. Remarquer premièrement que E et F se trouvent sur le cercle de Thalès de AH et BC. M et N sont les centres des cercles de Thalès, ainsi on a $AM = HM = EM = FM$ et $BN = CN = EN = FN$. Alors on a :

$$\angle NFC + \angle CFN = \angle FCN + \angle MHF = \angle HCD + \angle DHC = 180° - \angle CDH = 90°.$$

Pour la deuxième partie, on a montré que M et N se trouvent sur le cercle circonscrit de EDF. De la même manière, on peut montrer que les milieux des cotés CA et AB, ainsi que les milieux de BH et CH se trouvent sur ce cercle.

Olympiade

3.7 Soient A et B deux points distincts sur un cercle k. Le point C se trouve sur la tangente à k passant par B et tel que $AB = AC$. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de $\angle ABC$ avec AC. Supposons que le point D se trouve à l'intérieur de k. Montrer que $\angle ABC > 72°$.

Indication : Soit $\angle ABC = \beta$ et P un point sur le cercle k qui se trouve de l'autre coté de AB par rapport à C. D'après le théorème de l'angle tangent $\angle APB = \beta$. Soit encore Q un poit sur k, qui se trouve du même coté de AB par rapport à C. $AQBP$ est un quadrilatère inscrit, ainsi $\angle BQA = 180° - \beta$. Remarquer encore que D se trouve à l'intérieur de k si $\angle BDA > \angle BQA$. Ceci est équivalent à $\frac{3}{2}\beta > 180° - \beta$, da $\angle BDA = \angle DBC + \angle BCD = \frac{3}{2}\beta$. En bricolant, $\beta > 72°$.

3.8 Deux cercles k_1 et k_2 ayant comme centre M_1 respectivement M_2 se coupent aux points A et B. La droite M_1B coupe k_2 en $F \neq B$ et M_2B coupe k_1 en $E \neq B$. La parallèle à EF par B coupe k_1 et k_2 en deux autres points P respectivement Q.

(a) Montrer que B est le centre du cercle inscrit du triangle AEF.

(b) Montrer que $PQ = AE + AF$.

Indication : Pour (a) : Remarquer que $M_1A = M_1B = M_1E$ et $M_2A = M_2B = M_2F$. De plus, les médiatrices peuvent aider. Par chasse-aux-angles interposées, M_1AFE et AM_2FE sont des quadrilatères inscrits (autrement dit M_1, A, M_2, F et E se trouvent sur un même cercle). (Si tu désespères à ce stade, pense à celui qui a tout traduit de l'allemand et mange un morceau de chocolat.) Le reste se résume à de la chasse-aux-angles.
Pour (b) : Soit S l'intersection de PB et de AE. Montrer que PAS et que SBE sont isocèles. Ainsi, $PB = AE$. De manière analogue $BQ = AF$.