Géométrie I - La chasse aux angles

Daniel Sprecher

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

Table des matières

1 Introduction

Ce script est fait pour vous montrer à quoi ressemblent les exercices de géométrie des Olympiades de Mathématiques. La théorie nécessaire à leur résolution n'est ni longue ni difficile, elle est même plutôt intuitive. La difficulté des exercices est surtout de trouver la bonne approche, de reconnaître l'essentiel à partir d'un dessin et de combiner les faits trouvés afin d'obtenir une démonstration complète.
On suppose ici que la construction des figures géométriques (comme par exemple celle du cercle de Thalès) vous est familier. En particulier l'existence, la construction et les propriétés les plus importantes des points suivants du triangle devraient être connues : centre du cercle circonscrit, centre du cercle inscrit, orthocentre, centre de gravité (Lesquels de ces points peuvent-ils se trouver à l'extérieur du triangle ? A quoi ressemble alors ce triangle ?) De plus, on s'attend à ce que des théorèmes élémentaires comme le théorème de Pythagore et des notions de base comme l'angle aigu ($< 90°$) et l'angle obtus (entre $90°$ et $180°$) soient connus.
Chaque chapitre commence par quelques exercices résolus. Ils devraient vous permettre d'entrer dans le sujet et ils contiennent le peu de théorèmes s'y rapportant. Les solutions des exemples sont très détaillées, il n'est pas nécessaire que vous mettiez autant de détails dans vos preuves lors des examens, même si tous les pas et tous les cas doivent y figurer (Chap. 5).

2 Les angles du triangle

Nous allons commencer par un premier exemple.

Exemple 1. *Prouver que la somme des angles intérieurs d'un triangle quelconque $\triangle ABC$ vaut* $180°$.

Solution. Soit g la droite parallèle à AB passant par C (Fig. 1) Comme les trois angles suivants forment un angle plat, nous avons

$$\angle(g, CA) + \gamma + \angle(CB, g) = 180°.$$

Or l'angle $\angle(g, CA)$ est le même que α et $\angle(CB, g) = \beta$ car il s'agit d'angles alternes internes aux parallèles g et AB. Ceci nous donne $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

Comme tout n-gone convexe peut être construit à partir de $n-2$ triangles, la somme des angles dans un n-gone quelconque vaut $(n-2) \cdot 180°$ (on peut en faire une preuve plus précise à l'aide de l'induction).
Une conséquence de l'exemple 1 est le **théorème de l'angle extérieur**. On peut facilement se convaincre de sa justesse à l'aide d'un dessin.

Théorème 2.1 (Théorème de l'angle extérieur)**.** *Les angles extérieurs d'un triangle valent la somme des deux angles intérieurs non-adjacents.*

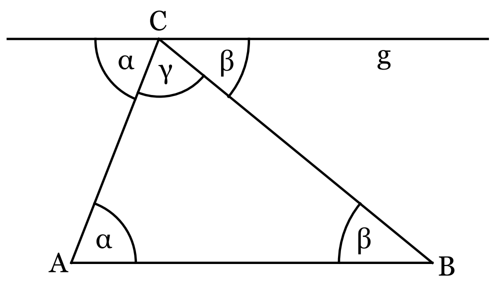

FIGURE 1 – Solution de l'exemple 1

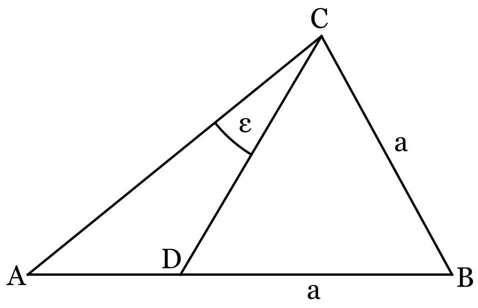

FIGURE 2 – Exemple 2

Exemple 2. *Dans un triangle $\triangle ABC$, le côté AB est plus long que le côté BC. D se trouve sur AB tel que $BD = BC$ (Fig. 2). Que vaut $\epsilon = \angle ACD$ si on sait que $\gamma - \alpha = 30°$?*

Solution. L'angle $\angle CDB$ est un angle extérieur de $\triangle ADC$ et donc la somme des angles intérieurs en A et en C (Fig. 3) :

$$\angle CDB = \alpha + \epsilon. \tag{1}$$

De plus, $\triangle BCD$ est isocèle et par conséquent

$$\angle CDB = \angle BCD = \gamma - \epsilon. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha + \epsilon &= \angle CDB = \gamma - \epsilon \\ \Leftrightarrow \alpha + 2\epsilon &= \gamma \\ \Leftrightarrow 2\epsilon &= \gamma - \alpha = 30° \\ \Leftrightarrow \epsilon &= 15° \end{aligned}$$

□

A première vue, on ne sait pas très bien à quoi sert la condition supplémentaire du dernier exemple. C'est souvent le cas et il n'y a malheureusement pas de recette miracle pour la traiter. Ici, nous l'avons d'abord mise de côté. Ce n'est qu'une fois que nous avons trouvé une relation entre les angles concernés $(\alpha, \gamma, \epsilon)$ qu'il est devenu clair comment nous pouvions utiliser cette condition supplémentaire. Il existe aussi certains cas où les conditions supplémentaires nous indiquent une manière de procéder pour trouver la solution.

Exemple 3. *Soit $\triangle ABC$ un triangle avec $\angle ACB = 90°$ (Fig. 4). Soit P un point tel que les droites PB et AB sont perpendiculaires et $PB = CB$. Montrer que la droite PC est soit perpendiculaire, soit parallèle à la bissectrice w_α de $\angle CAB$.*

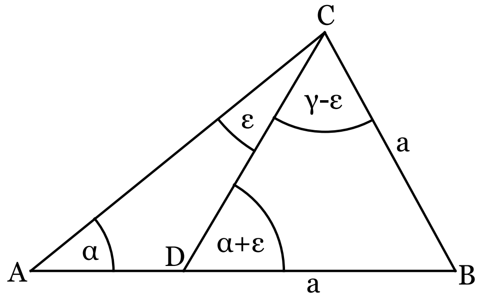

FIGURE 3 – Solution de l'exemple 2

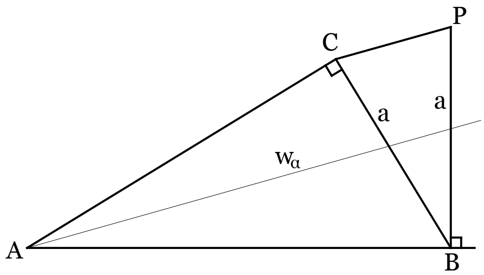

FIGURE 4 – Exemple 3

Solution. Il existe deux points qui remplissent les conditions pour P. Soit P_1 le point qui se trouve du même côté de AB que C (Fig. 5) et P_2 celui qui se trouve du côté opposé de AB (Fig. 6).
Comme $\gamma = 90°$, il y a une relation directe entre α et β :

$$\beta = 90° - \alpha$$

et donc

$$\angle CBP_1 = \alpha.$$

Le triangle $\triangle BP_1C$ est par hypothèse isocèle, nous avons donc

$$\angle BP_1C = \angle P_1CB.$$

Pour la somme des angles dans le triangle, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \alpha + 2 \cdot \angle P_1CB = 180° \\ \Leftrightarrow \quad & \angle P_1CB = 90° - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Soit Q l'intersection de w_α avec CB. Comme $\angle CAQ = \frac{\alpha}{2}$, nous avons

$$\angle AQC = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle P_1CB.$$

$\angle AQC$ et $\angle P_1CB$ sont donc des angles alternes internes, ce qui entraîne que w_α et P_1C sont parallèles.
Considérons maintenant le cas de P_2. Nous avons $\angle P_2BC = 180° - \alpha$ et donc

$$\angle BCP_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Soit R l'intersection de w_α avec CP_2. Dans le triangle $\triangle QCR$,

$$\angle QCR + \angle RQC = \angle BCP_2 + (90° - \angle CAQ) = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°.$$

Ainsi, $\angle CRQ = 90°$ et $w_\alpha \perp \angle CP_2$. □

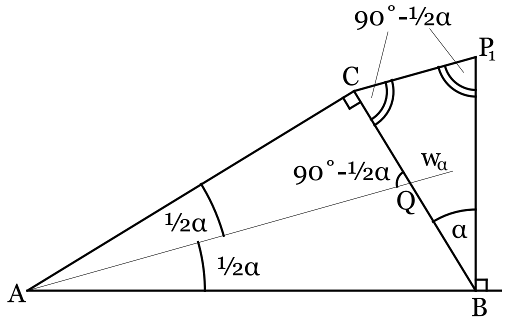

FIGURE 5 – Solution de l'exemple 3, cas 1

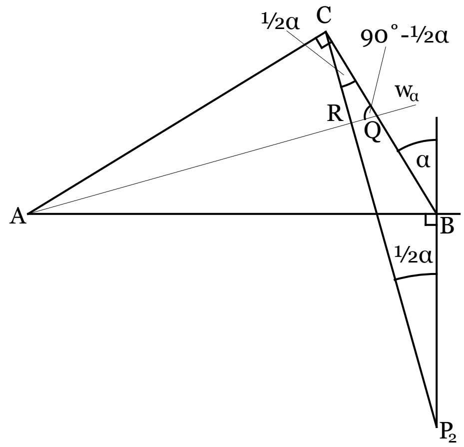

FIGURE 6 – Solution de l'exemple 3, cas 2

Cet exemple montre bien ce que nous entendons par chasse aux angles. On considère un des angles comme pivot (ici $\angle CAB = \alpha$) et on exprime tous les autres angles en fonction de celui-ci (par exemple $\angle AQC = 90° - \frac{\alpha}{2}$). Autrement dit, si l'on fixe α, tous les autres angles sont fixés. Dans certains exercices, il est nécessaire d'introduire plusieurs pivots à la fois.

3 Les angles dans le cercle

Soit O le centre d'un cercle et A et B deux points sur le bord. L'angle AOB s'appelle **l'angle au centre** interceptant l'arc $\widehat{AB}$. Remarquons en passant qu'il y a toujours deux possibilités pour $\widehat{AB}$, d'un côté $\angle AOB \leq 180°$ et de l'autre $\angle AOB \geq 180°$. Même si la plupart du temps on peut déduire du contexte de quel angle il s'agit, c'est mieux de le déclarer clairement (comme nous allons le faire dans le théorème suivant).

Théorème 3.1 (Théorème de l'angle au centre)**.** *Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle quelconque ABC avec $\angle BAC = \alpha$. L'angle au centre interceptant l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point A vaut alors 2α.*

Preuve. On ne démontre ici que le cas où $\triangle ABC$ est un triangle aigu (Fig. 7), les deux autres cas fonctionnent de façon analogue. Comme $\triangle ABC$ est un triangle aigu, O se trouve à l'intérieur de ABC et nous pouvons séparer α en deux angles plus petits en posant $\alpha_1 = \angle OAB$ et $\alpha_2 = \angle CAO$ (Fig.7). Etant donné que O est le centre du cercle circonscrit, $\triangle OAB$ et $\triangle OCA$ sont isocèles, autrement dit

$$\angle ABO = \alpha_1, \quad \angle OCA = \alpha_2.$$

En prolongeant la droite AO jusqu'à son intersection avec le cercle circonscrit en D, on voit que $\angle DOB$ est l'angle extérieur de $\triangle OAB$ et $\angle COD$ celui de $\triangle OCA$. Nous obtenons par conséquent

$$\angle COB = \angle COD + \angle DOB = 2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2\alpha.$$

□

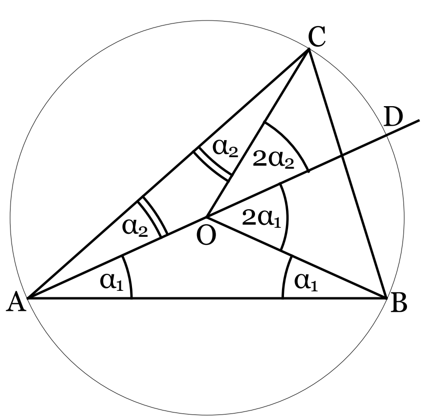

FIGURE 7 – Théorème de l'angle au centre

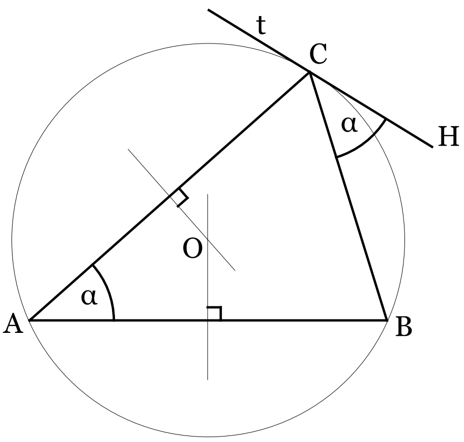

FIGURE 8 – Théorème de l'angle tangent

L'angle BAC dans la figure 7 s'appelle **l'angle inscrit** interceptant l'arc $\widehat{BC}$. Réfléchissez un peu à ce qui arrive si on déplace le point A sur le bord du cercle circonscrit. Cela vous donnera directement le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Théorème de l'angle inscrit)**.** *Soit $\widehat{BC}$ un arc quelconque sur un cercle k. Tous les angles inscrits interceptant $\widehat{BC}$ sont égaux.*

Preuve. On considère de nouveau la figure 7 et on choisit l'arc $\widehat{BC}$ qui contient le point D. L'angle au centre COB est clairement indépendant du choix de A et il s'ensuit du théorème de l'angle au centre que la valeur de l'angle $\angle CAB$ doit également être constant aussi longtemps que A reste du même côté de BC. □

Théorème 3.3 (Théorème de l'angle tangent)**.** *Soit ABC un triangle quelconque et k son cercle circonscrit avec le centre en O. Soit t la tangente en C au cercle k (Fig. 8). C partage ainsi t en deux demi-droites ; on choisit un point quelconque H sur la demi-droite qui ne se trouve pas du même côté de BC que A. On a alors $\angle BAC = \angle BCH$.*

Preuve. (Fig. 9) A l'aide du théorème de l'angle inscrit, nous pouvons calculer

$$\angle BOC = 2\alpha.$$

$\triangle OBC$ est isocèle, nous pouvons ainsi trouver $\angle OCB$ à l'aide de la somme des angles dans un triangle :

$$\angle OCB = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha.$$

Les tangentes étant toujours perpendiculaires aux rayons respectifs, nous avons $\angle OCH = 90°$. La dernière étape n'est plus difficile :

$$\angle BCH = 90° - \angle OCB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha.$$

□

Ce théorème que l'on va appeler **le théorème de l'angle tangent** nous sera utile plus tard pour résoudre des exercices plus compliqués sans devoir introduire le centre du cercle circonscrit dans nos calculs. Nous aurons ainsi des dessins plus clairs et des calculs plus simples à traiter. En voici maintenant un exemple.

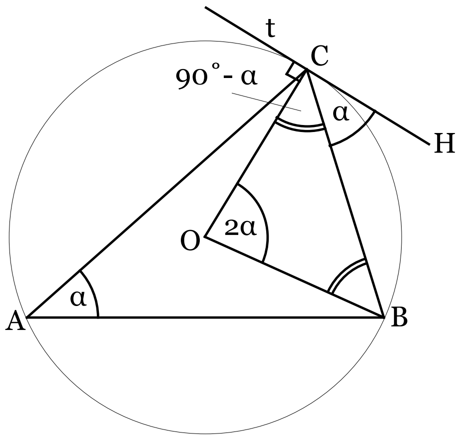

FIGURE 9 – Preuve du théorème de l'angle tangent

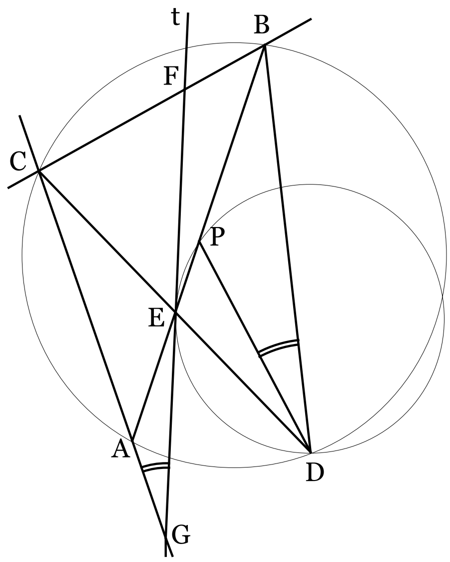

FIGURE 10 – Exemple 4

Exemple 4. *Les deux cordes AB et CD se coupent à l'intérieur du cercle en E (Fig. 10). Soit P un point arbitraire sur le segment BE. La tangente t au cercle passant par D, P et E en E coupe la droite BC en F et AC en G. Montrer que $\angle FGC = \angle BDP$.*

Solution. (Fig. 12) Posons d'abord

$$\angle EPD = \alpha, \quad \angle ACE = \beta$$

(plusieurs substitutions sont possibles)
Cela nous permet de déterminer plusieurs autres angles. Selon le théorème de l'angle tangent,

$$\angle GED = \alpha$$

qui se trouve être un angle extérieur de $\triangle ECG$. Ainsi,

$$\angle FGC = \alpha - \beta.$$

D'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\angle ABD = \beta$$

et à l'aide de l'angle extérieur $\angle EPD = \alpha$, nous obtenons

$$\angle BDP = \alpha - \beta$$

donc égal à $\angle FGC$. □

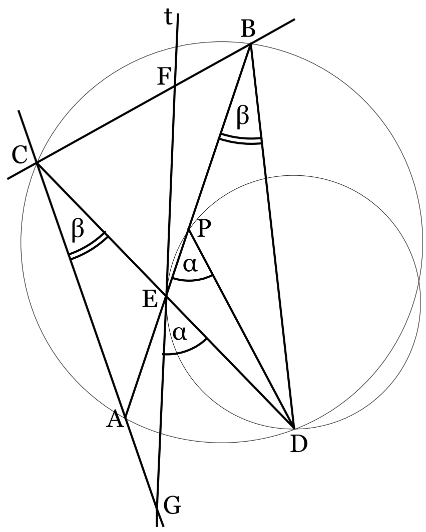

FIGURE 11 – Solution de l'exemple 4

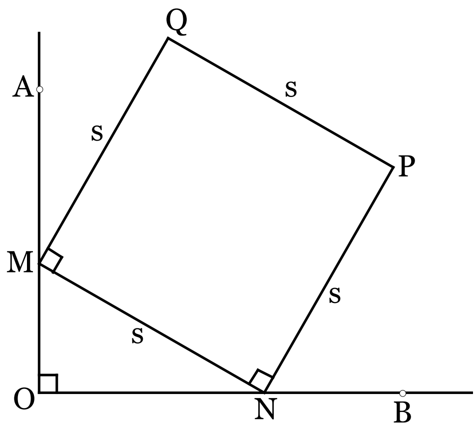

FIGURE 12 – Exemple 5

La solution de cet exercice a l'air plutôt simple mais il est très facile de se perdre dans la jungle de cercles et de droites qu'on dessine. Garder toujours une vision d'ensemble représente une des difficultés majeures en géométrie. Faire un grand dessin précis avec règle et compas s'avère donc la plupart du temps payant !
Pour résoudre ce problème, on avait seulement besoin de substituer deux angles (α et β). Si l'on avait voulu déterminer tous les angles sur cette figure, plus de pivots auraient été nécessaires. Essayez de faire cela en exercice. Combien d'angles a-t-on besoin de substituer au minimum ? (Réponse : la figure a quatre degrés de liberté (en ignorant la translation, l'homothétie et la rotation) ; on peut ainsi exprimer tous les angles de la figure 12 à l'aide de quatre pivots.)

Exemple 5. *Soit $\angle AOB$ un angle droit avec un point M sur la demi-droite OA et un point N sur la demi-droite OB (Fig.* **??***). Complétons M et N en un carré $MNPQ$ tel que P se trouve du côté opposé de MN par rapport à O. Comment se déplace-t-il le centre du carré $MNPQ$ quand on déplace M et N librement sur les demi-droites ?*

Solution. Nous traçons d'abord les diagonales du carré. Soit le point D leur intersection (Fig. 13). $\angle MON$ et $\angle MDN$ sont des angles droits, il peut donc être utile de dessiner

le cercle de Thalès sur le segment MN. Ainsi, les points O et D se trouvent également sur ce cercle. Comme $MNPQ$ est un carré, nous avons $\angle DNM = 45°$. Selon le théorème de l'angle inscrit, $\angle DOM = \angle DNM = 45°$. Le centre du carré se trouve donc indépendamment de M et de N sur la bissectrice de $\angle AOB$.

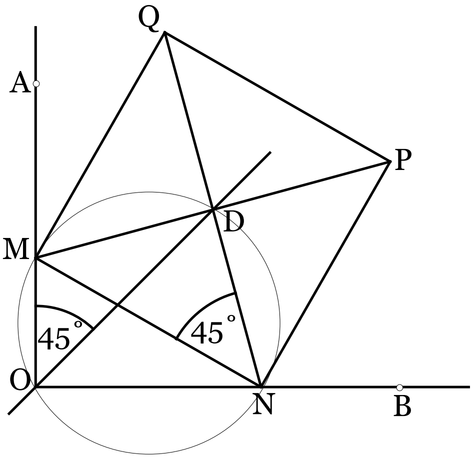

FIGURE 13 – Exemple 5, première partie

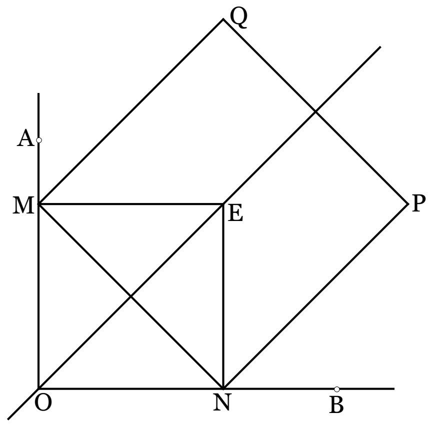

FIGURE 14 – Solution 5, deuxième partie

Nous n'avons pas encore terminé, car il nous reste à démontrer que chaque point de la bissectrice est le centre d'un carré donné. Prenons donc un point E arbitraire sur la bissectrice de $\angle AOB$ et traçons le carré $MONE$ avec M sur OA et N sur OB (Fig. 14). En dessinant le carré $MNPQ$, il devient évident que son centre se trouve en E. Nous avons ainsi prouvé que le centre du carré se déplace sur toute la bissectrice (ici une demi-droite) de $\angle AOB$. □

4 Quadrilatères inscrits

Nous arrivons maintenant à l'essentiel de notre sujet, car les quadrilatères inscrits apparaissent dans la majorité des exercices de concours. Un quadrilatère inscrit est un quadrilatère convexe dont les quatre sommets se trouvent sur le même cercle. Voici une propriété importante.

Théorème 4.1. *Dans un quadrilatère inscrit $ABCD$, la somme de deux angles intérieurs opposés vaut toujours* $180°$.

Preuve. Quand on travaille avec des quadrilatères inscrits, il est en général conseillé de commencer par dessiner les diagonales et partager ainsi les angles intérieurs (Fig. 15). Appelons $\angle CAB = \alpha$ et $\angle DAC = \beta$. A l'aide du théorème de l'angle inscrit, nous obtenons

$$\angle CDB = \beta, \quad \angle DBC = \alpha$$

et ensuite à l'aide de la sommes des angles dans $\triangle BCD$,

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \angle BAD$$

$\square$

Je reconnais volontiers que ce résultat n'est pas très spectaculaire. Il est par contre bien plus surprenant que la réciproque soit également vraie :

Théorème 4.2. *Soient quatre points A, B, C, D ordonnés qui forment un quadrilatère convexe. Si*
$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$*, alors les points se trouvent sur le même cercle.*

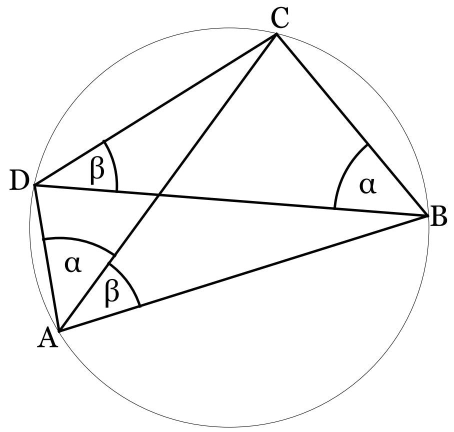

Figure 15 – Solution de l'exemple 5

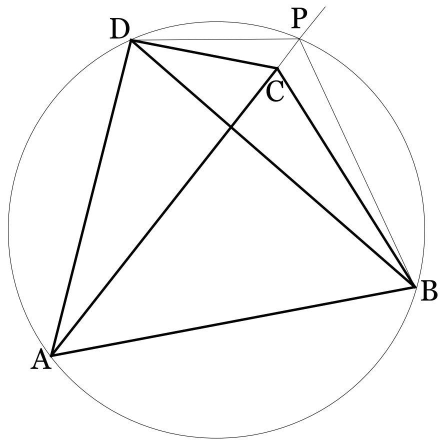

Figure 16 – Solution de l'exemple 6

Solution. (Fig. 16) Dessinons d'abord le cercle circonscrit k de $\triangle ABD$. Supposons que C ne se trouve pas sur k. Si cette supposition nous amène à une contradiction, alors l'énoncé est prouvé. Considérons d'abord le cas où C se trouve à l'intérieur du cercle.
Soit P l'intersection de la droite AC avec k. Comme $ABPD$ est un quadrilatère inscrit, nous savons que

$$\angle BAD + \angle BPD = 180^\circ$$

Si l'on pouvait montrer que $\angle BCD$ est plus grand que $\angle BPD$, nous aurions la contradiction désirée car la somme $\angle BAD + \angle BCD$ ne pourrait plus valoir 180°, ce qui serait contraire à notre hypothèse. Intuitivement c'est vrai, la preuve va comme suit :
Comme C se trouve à l'intérieur du cercle, $\angle CBD < \angle PBD$ et de manière analogue $\angle CDB < \angle PDB$. La somme des angles donne alors

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB > 180^\circ - \angle PBD - \angle PDB = \angle BPD.$$

Le cas où C se trouve à l'extérieur de k se démontre de façon analogue. $\square$

L'argument qu'on emploie ici donne à première vue l'impression de manquer de précision. Ce n'est pourtant pas le cas, cette méthode de démonstration porte même un nom. Elle s'appelle 'Working Backward' et elle apparaît souvent dans les preuves. Il peut donc être utile de se rappeler du schéma.
Nous avons déjà vu un cas simple de quadrilatère inscrit dans l'exemple 5, où nous avons dessiné le cercle de Thalès car les deux angles opposés étaient des angles droits. Pour finir, je vous présente un exemple difficile dont la clé est de trouver les quadrilatères inscrits.

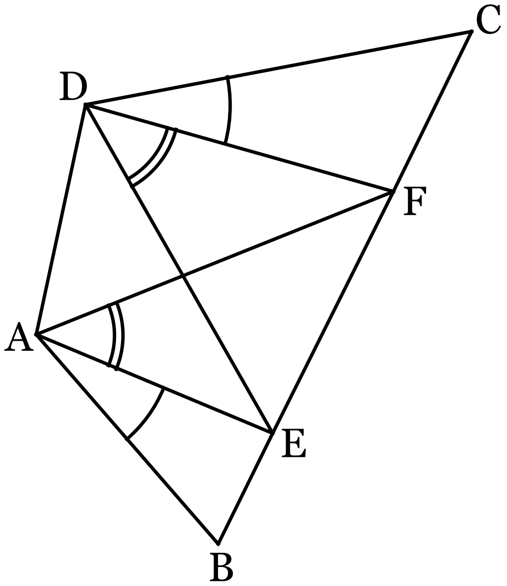

Figure 17 – Exemple 6

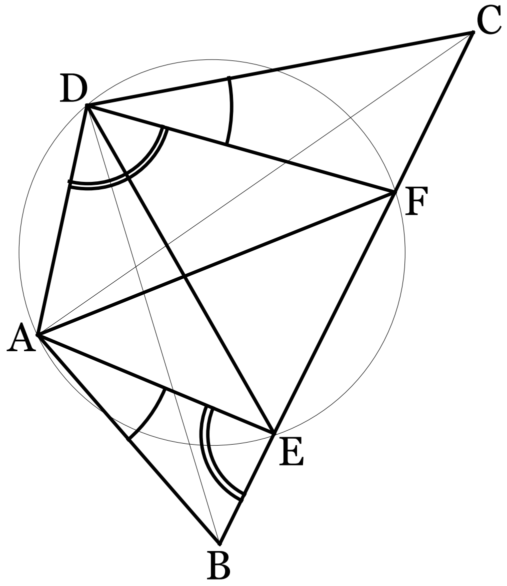

Figure 18 – Solution de l'exemple 6

Exemple 6. *Les points E et F se trouvent sur le côté BC du quadrilatère convexe $ABCD$ tels que E est plus proche de B que F (Fig. 17). Soit $\angle BAE = \angle CDF$ et $\angle EAF = \angle FDE$.*
Montrer que $\angle FAC = \angle EDB$.

Solution. (Fig. 18) Dans ce genre d'exercices, on se perd souvent dans la jungle des droites et angles auxiliaires qu'on dessine. Cela vaut donc la peine de se faire un dessin convenable. En général, je commence par dessiner soigneusement les données du problème avec un stylo. Ensuite, je dessine le reste avec un crayon en faisant des traits plus ou moins épais selon leur importance. Ceci me permet d'effacer certains traits sans devoir recommencer tout depuis le début.
La première chose qu'on remarque dans cet exemple est le fait que les deux angles sur le segment EF sont égaux. En inversant le théorème de l'angle inscrit, nous pouvons conclure que $AEFD$ est un quadrilatère inscrit. Nous pourrions prouver cette assertion en appliquant la méthode du 'Working Backward', mais nous le considérons comme un résultat connu et une preuve n'est ainsi pas exigée.

Ensuite, c'est la partie difficile de l'exercice qui vient. Nous avons un quadrilatère inscrit et une deuxième hypothèse. Comment pourrait-on l'appliquer ? Si on arrive pas à continuer, on peut puiser de l'inspiration dans la réflexion suivante :
Supposons que ce qu'on aimerait montrer soit vrai (ici $\angle FAC = \angle EDB$). Qu'est-ce qui s'en ensuit ? L'hypothèse et la réciproque du théorème de l'angle inscrit entraînent que $ABCD$ est un quadrilatère inscrit. Ce n'est bien sûr pas une preuve mais nous pouvons en tout cas être sûrs que c'est le cas ! Nous pouvons maintenant essayer de le démontrer directement en partant des hypothèses. En inversant notre première réflexion nous pouvons alors terminer la preuve. Pour montrer que $ABCD$ est un quadrilatère inscrit, il suffit de prouver qu'on a $\angle ADC + \angle ABC = 180°$.

$$\angle ABC = 180° - \angle BEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle BAE$$

Pour les étapes suivantes, nous avons besoin de l'hypothèse que $\angle BAE = \angle CDF$, et ensuite que $AEFD$ est un quadrilatère inscrit

$$\angle ABC = \angle CEA - \angle BAE = \angle CEA - \angle CDF = 180° - \angle FDA - \angle CDF = 180° - \angle ADC$$

$ABCD$ est donc effectivement un quadrilatère inscrit, ce qui nous donne le résultat cherché :

$$\angle FAC = \angle BAC - \angle BAF = \angle BDC - \angle BAF = \angle BDC - \angle EDC = \angle EDB$$

$\square$

5 Conseils pour l'examen

1. Prenez impérativement un compas et une règle ou une équerre avec vous ! Souvent on ne voit un rapport géométrique important qu'après avoir construit un dessin précis. L'utilisation des couleurs aide aussi la perception.
2. Ne pas avoir peur de faire plusieurs dessins. Quand on n'y voit plus rien, persévérer et recommencer le dessin depuis le début.
3. Après avoir trouvé la solution sur le dessin, il faut encore l'écrire correctement si l'on veut éviter de perdre des points. Vous devez montrer dans votre preuve que vous avez vu toutes les étapes nécessaires à la solution. Le mieux c'est de relire la preuve encore une fois à la fin et la compléter si vous avez l'impression que quelque chose pourrait manquer (mieux vaut écrire trop que pas assez). En géométrie vous devez faire particulièrement attention aux points suivants :
   (a) Si vous introduisez des pivots (comme par ex. $\alpha, \ldots$), vous devez dire au début de la preuve comment ceux-ci sont définis (par ex. "‘Soit $\alpha = \angle DAN$, $\beta = \ldots$"’). Exception : dans le cas d'un triangle ABC, si rien d'autre n'est défini, on a par défaut $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$.

(b) Même remarque pour tous les points, droites, cercles, etc. que vous introduisez. Aussitôt qu'un objet non mentionné dans la donnée du problème est utilisé, il doit être clair comment vous l'avez défini.

(c) Tous les théorèmes présentés dans ce script peuvent être utilisés sans mention explicite à chaque fois (car on les utilise sans arrêt). Cela ne veut cependant pas dire que vous n'avez pas besoin de noter toutes les étapes. Si par exemple $ABCD$ est un quadrilatère inscrit, on peut tout simplement écrire "'$\angle BCA = \angle BDA$ (arc AB)"' sans mentionner explicitement le théorème de l'angle inscrit.