Aufgaben Geometrie I

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Winkel im Dreieck

Einstieg

1.1 Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$, in welchem die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ senkrecht auf AC steht. Zeige, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Fortgeschritten

1.2 Sei ABC ein Dreieck mit $AB > AC$. Die Winkelhalbierende des Aussenwinkels bei C schneide die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ in D. Die Parallele zu BC durch D schneide CA in L und AB in M.
Zeige, dass $LM = BM - CL$ gilt.

2 Winkel im Kreis

Einstieg

2.1 Die Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis. Berechne den Winkel $\angle DBA$, wenn gegeben ist:

(a) $\angle DCA = 56°$

(b) $\angle CBD = 39°$, $\angle ADC = 121°$

(c) $\angle CBA = 91°$, $\angle CAD = 13°$

(d) $\angle ADB = 41°$, $\angle DCB = 103°$

(e) $\angle BAD = 140°$, $\angle ACB = 17°$

2.2 Sei ABC ein Dreieck und P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und dem Umkreis des Dreiecks ABC. Zeige, dass BPC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

2.3 Sei $ABCD$ ein Viereck mit $\angle BAD = 131°$, $\angle DBA = 17°$ und $\angle ACB = 32°$. Wie gross ist $\angle DCA$?

2.4 Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k und Umkreismittelpunkt O. Bezeichne mit t die Tangente an k in A. Sei s die Spiegelung der Geraden AB an t. Zeige, dass s eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABO ist.

2.5 Seien A und B zwei verschiedene Punkte und k der Kreis mit Durchmesser AB. Begründe, weshalb die Peripheriewinkel über der Strecke AB alle 90° betragen. (Einen solchen Kreis nennt man den *Thaleskreis* über der Strecke AB.)

Fortgeschritten

2.6 Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Gerade CI schneide den Umkreis des Dreiecks ABI ein weiteres Mal in D und AI schneide den Umkreis des Dreiecks BCI ein weiteres Mal in E.
Zeige, dass die Punkte D, E und B auf einer Geraden liegen.

2.7 Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt der Hypotenuse AB. Zeige, dass $AM = BM = CM$ gilt.

Olympiade

2.8 Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse AB, H der Höhenfusspunkt der Höhe durch C und W der Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$. Zeige, dass $\angle HCW = \angle WCM$ gilt.

2.9 Die Schwerelinien AA', BB' und CC' im Dreieck ABC schneiden den Umkreis des Dreiecks ABC weitere Male in den Punkten A_0, B_0 respektive C_0 (Diese Formulierung bedeutet automatisch, dass A', B' und C' die entsprechenden Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC sind). Nehme an, der Schwerpunkt S halbiere die Strecke AA_0. Zeige, dass dann $A_0B_0C_0$ ein gleichschenkliges Dreieck ist.

3 Sehnenvierecke

Einstieg

3.1 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und den Höhenfusspunkten H_A, H_B und H_C. Zeige, dass AH_CHH_B und BCH_BH_C Sehnenvierecke sind.

Fortgeschritten

3.2 Sei ABC ein Dreieck und seien D, E und F Punkte auf den Seiten BC, CA respektive AB. Bezeichne mit P den zweiten Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke FBD und DCE. Zeige, dass $AFPE$ ein Sehnenviereck ist.

3.3 Sei $ABCD$ ein Rechteck und M der Mittelpunkt der Seite AB. Sei P die Projektion von C auf die Gerade MD (d.h. P liegt so auf MD, dass CP und MD senkrecht aufeinander stehen).
Zeige, dass PBC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

3.4 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und den Höhenfusspunkten D, E und F. Zeige, dass H der Inkreismittelpunkt des Dreiecks DEF ist.

3.5 Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, in welchem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen (*konvex* bedeutet für n-Ecke, dass alle Innenwinkel $\leq 180°$ sind). Bezeichne mit P den Diagonalenschnittpunkt. Zeige, dass die vier Projektionen von P auf die Geraden AB, BC, CD und DA ein Sehnenviereck bilden.

3.6 Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Weiter sei M der Mittelpunkt der Strecke AH und N der Mittelpunkt der Strecke BC.
Zeige, dass die drei Höhenfusspunkte auf dem Thaleskreis über MN liegen.
Wieso impliziert dies, dass die drei Höhenfusspunkte, die drei Seitenmittelpunkte und die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH alle auf einem Kreis liegen? (Diesen Kreis nennt man den *Feuerbachkreis* oder auch *Neun-Punkte-Kreis*.)

Olympiade

3.7 Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf dem Kreis k. Der Punkt C liege auf der Tangente an k durch B und es gelte $AB = AC$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit AC sei D. Angenommen, der Punkte D liege im Innern von k. Zeige, dass $\angle ABC > 72°$ gilt.

3.8 Zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 respektive M_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Gerade M_1B schneide k_2 in $F \neq B$ und M_2B schneide k_1 in $E \neq B$. Die Parallele zu EF durch B schneide k_1 und k_2 in den weiteren Punkten P respektive Q.

(a) Zeige, dass B der Inkreismittelpunkt des Dreiecks AEF ist.

(b) Zeige, dass $PQ = AE + AF$ gilt.

4 Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Alte Prüfungsaufgaben sind für die Vorbereitung sehr geeignet; einerseits entsprechen sie natürlich dem Prüfungsniveau, und andererseits sind alle Lösungen zu den Aufgaben auf der Homepage `www.imosuisse.ch` zu finden. Man sollte jedoch immer zuerst selbst an den Aufgaben gearbeitet haben, bevor man sich die Musterlösungen dazu anschaut!

1. **(Vorrunde 2010, 2.)** Sei g eine Gerade in der Ebene. Die Kreise k_1 und k_2 liegen auf derselben Seite von g und berühren g in den Punkten A respektive B. Ein weiterer Kreis k_3 berühre k_1 in D und k_2 in C. Beweise, dass gilt:

   (a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

   (b) Die Geraden BC und AD schneiden sich auf k_3.

2. **(Vorrunde 2011, 1.)** Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Der Punkt L liegt auf der Seite BC. Der Umkreis des Dreiecks ABL schneidet die Gerade AC in M und der Umkreis des Dreiecks CAL schneidet die Gerade AB in N. Nehme an, N liege im Inneren der Seite AB und M auf der Verlängerung der Seite AC. Zeige, dass L, M und N auf einer Geraden liegen.

3. **(Vorrunde 2012, 3.)** Seien A und B die Schnittpunkte zweier Kreise k und l mit Mittelpunkten K respektive L. Seien M und N die Schnittpunkte von k respektive l mit einer Geraden durch A, sodass A zwischen M und N liegt. Sei D der Schnittpunkt der Geraden MK und NL. Zeige, dass die Punkte M, N, B und D auf einem Kreis liegen.

4. **(Vorrunde 2013, 2.)** Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 respektive k_2, welche sich im Punkt P senkrecht schneiden. Ferner schneide k_1 die Strecke M_1M_2 in Q. Zeige, dass sich die Senkrechte zur Strecke M_1M_2 durch den Punkt M_2 und die Gerade PQ auf k_2 schneiden.

5. **(Vorrunde 2014, 2.)** Zwei Kreise k_1, k_2 mit Mittelpunkten M_1 respektive M_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Tangente an k_1 durch A schneidet k_2 ein weiteres Mal im Punkt P, während die Gerade M_1B k_2 ein weiteres Mal im Punkt Q schneidet. Nehme an, Q liege ausserhalb von k_1 und es gelte $P \neq Q$. Zeige, dass PQ parallel zu M_1M_2 ist.