Exercice Géometrie I

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

1 Angles dans le triangle

Mise en jambes

1.1 Soit ABC un triangle avec $AB = AC$, dans lequel la bissectrice de $\angle ABC$ coupe perpendiculairement AC. Montrer que ABC est équilatéral.

Avancé

1.2 Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. La bissectrice de l'angle extérieur en C coupe la bissectrice de $\angle ABC$ en D. La parallèle à BC passant par D coupe CA en L et AB en M.
Montrer que $LM = BM - CL$.

2 Angles dans le cercle

Mise en jambes

2.1 Les points A, B, C et D se trouvent dans cet ordre sur un cercle. Calculer l'angle $\angle DBA$ dans les cas suivants :

(a) $\angle DCA = 56°$

(b) $\angle CBD = 39°$, $\angle ADC = 121°$

(c) $\angle CBA = 91°$, $\angle CAD = 13°$

(d) $\angle ADB = 41°$, $\angle DCB = 103°$

(e) $\angle BAD = 140°$, $\angle ACB = 17°$

2.2 Soit ABC un triangle et P le deuxième point d'intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que BPC est un triangle isocèle.

2.3 Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $\angle BAD = 131°$, $\angle DBA = 17°$ et $\angle ACB = 32°$. Combien vaut $\angle DCA$?

2.4 Soit ABC un triangle avec k son cercle circonscrit, de centre O. Soit t la tangente à k au point A. Soit s la réflexion de la droite AB par rapport à t. Montrer que s est une tangente au cercle circonscrit au triangle ABO.

2.5 Soient A et B deux points distincts et k le cercle ayant pour diamètre AB. Prouver que les tous les angles inscrits regardant AB valent $90°$. (Un tel cercle est appelé *cercle de Thalès* du segment AB.)

Avancé

2.6 Soit ABC un triangle avec I son centre du cercle inscrit. La droite CI coupe le cercle circonscrit du triangle ABI une deuxième fois en D et AI coupe le cercle circonscrit du triangle BCI une deuxième fois en E.
Montrer que les points D, E et B sont alignés.

2.7 Soit ABC un triangle rectangle et M le milieu de l'hypoténuse AB. Montrer que $AM = BM = CM$.

Olympiade

2.8 Dans un triangle rectangle ABC, soit M le milieu de l'hypoténuse AB, H le pied de la hauteur issue de C et W le point d'intersection de AB avec la bissectrice de $\angle ACB$. Montrer que $\angle HCW = \angle WCM$.

2.9 Les médianes AA', BB' et CC' du triangle ABC coupent le cercle circonscrit du triangle ABC une deuxième fois aux points A_0, B_0 respectivement C_0 (Cette formulation veut automatiquement dire que A', B' et C' sont les points milieux des côtés du triangle ABC). Supposons que le centre de gravité S est le milieu du segment AA_0. Montrer alors que $A_0B_0C_0$ est un triangle isocèle.

3 Quadrilatères inscrits

Mise en jambes

3.1 Soit ABC un triangle avec H son orthocentre et H_A, H_B et H_C les pieds de ses hauteurs. Montrer que AH_CHH_B et BCH_BH_C sont des quadrilatères inscrits.

Avancé

3.2 Soit ABC un triangle et soient D, E et F des points sur les côtés BC, CA respectivement AB. Définissons P comme le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits des triangles FBD et DCE. Montrer que $AFPE$ est un quadrilatère inscrit.

3.3 Soit $ABCD$ un rectangle et M le milieu du côté AB. Soit P la projection de C sur la droite MD (c-à-d. P se trouve sur MD de telle sorte que CP et MD soient perpendiculaires).
Montrer que PBC est un triangle isocèle.

3.4 Soit ABC un triangle avec son orthocentre H et ses pieds des hauteurs D, E et F. Montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle DEF.

3.5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel les diagonales se coupent perpendiculairement (*convexe* signifie, pour un n-gone, que tous les angles intérieurs soient $\leq 180°$). Posons P l'intersection des diagonales. Montrer que les quatre projections de P sur les droites AB, BC, CD et DA forment un quadrilatère inscrit.

3.6 Soit ABC un triangle avec H son orthocentre. Ensuite, soit M le milieu du segment AH et N le milieu du segment BC.
Montrer que les 3 pieds des hauteurs du triangle ABC se trouvent sur le cercle de Thalès du segment MN.
Comment cela implique-t-il que les trois pieds des hauteurs de ABC, les trois milieux des côtés de ABC et les milieux des segments AH, BH et CH se trouvent tous sur un cercle ? (On appelle ce cercle le *cercle de Feuerbach* ou aussi *cercle des* 9 *points*.)

Olympiade

3.7 Soient A et B deux points distincts sur un cercle k. Le point C se trouve sur la tangente à k passant par B et tel que $AB = AC$. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de $\angle ABC$ avec AC. Supposons que le point D se trouve à l'intérieur de k. Montrer que $\angle ABC > 72°$.

3.8 Deux cercles k_1 et k_2 ayant comme centre M_1 respectivement M_2 se coupent aux points A et B. La droite M_1B coupe k_2 en $F \neq B$ et M_2B coupe k_1 en $E \neq B$. La parallèle à EF par B coupe k_1 et k_2 en deux autres points P respectivement Q.
   (a) Montrer que B est le centre du cercle inscrit du triangle AEF.
   (b) Montrer que $PQ = AE + AF$.

4 Exercices des Olympiades précédentes

Résoudre des problèmes d'anciens examens est très approprié pour la préparation ; en effet, ils permettent de situer le niveau de difficulté des problèmes que vous rencontrerez cette année et les solutions de ces problèmes se trouvent sur le site officiel `www.imosuisse.ch`. Idéalement, vous devriez toujours essayer ces problèmes pendant un certain temps avant de vous précipiter sur la solution !

1. **(Tour préliminaire 2010, 2.)** Soit g une droite dans le plan. Les cercles k_1 et k_2 se trouvent du même côté de g sont tangents à g aux points A respectivement B. Un autre cercle k_3 est tangent à k_1 en D et à k_2 en C. Prouver que
   (a) Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit.
   (b) Les droites BC et AD se coupent sur k_3.

2. **(Tour préliminaire 2011, 1.)** Soit ABC un triangle avec $\angle CAB = 90°$. Le point L se trouve sur le segment BC. Le cercle circonscrit au triangle ABL coupe la droite AC en M et le cercle circonscrit au triangle CAL coupe la droite AB en N. Supposons que N se trouve à l'intérieur du segment AB et M sur le prolongement du côté AC. Montrer que L, M et N sont alignés.

3. **(Tour préliminaire 2012, 3.)** Soient A et B les deux points d'intersection des cercles k et l ayant pour centre K respectivement L. Soient M et N les deuxièmes points d'intersection de k respectivement l avec une droite passant par A, de telle sorte que A se trouve entre M et N. Soit D le point d'intersection des droites MK et NL. Montrer que les points M, N, B et D sont cocycliques.

4. **(Tour préliminaire 2013, 2.)** Soient M_1 et M_2 les centres des cercles k_1 respectivement k_2, qui se coupent perpendiculairement en P, c'est à dire que $\angle M_1PM_2 = 90°$. De plus, le segment M_1M_2 coupe k_1 en Q. Montrer que la perpendiculaire à M_1M_2 par M_2 et la droite PQ se coupent sur k_2.

5. **(Tour préliminaire 2014, 2.)** Deux cercles k_1, k_2 ayant comme centre M_1 respectivement M_2 se coupent aux points A et B. La tangente à k_1 passant par A coupe k_2 une deuxième fois au point P, et la droite M_1B coupe k_2 une deuxième fois au point Q. Supposons que Q se trouve en dehors de k_1 et on a $P \neq Q$. Montrer que PQ est parallèle à M_1M_2.