MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Principio dei cassetti

Aggiornato: 3 agosto 2021
vers. 1.1.0

1 Teoria

Il *principio dei cassetti* di Dirichlet (a volte chiamato anche *principio dei piccioni*) afferma quanto segue:

> Se $k \cdot n + 1$ perle vengono distribuite su n cassetti, allora almeno un cassetto contiene $k+1$ (o più) perle.

Malgrado la sua semplicità possiede moltissime applicazioni. Svariate affermazioni di esistenza riguardanti gli insiemi finiti possono venir dimostrate mediante il principio dei cassetti. La maggior difficoltà nel suo utilizzo sta nell'identificare le "perle" e i "cassetti".

Esempio 1 *Tra sei persone ve ne sono sempre tre, le quali si conoscono reciprocamente, oppure tre, le quali non si conoscono reciprocamente.*

Soluzione. Consideriamo una persona qualsiasi fra queste sei e cerchiamo di stabilire quante delle altre cinque persone conosce, rispettivamente non conosce. Chiamiamo questa persona A. Per il principio dei cassetti vi sono almeno tre persone (tra le cinque rimanenti), le quali o tutte conoscono A o tutte *non* conoscono A. WLOG vi sono tre persone che conoscono tutte A. Adesso ragioniamo come segue: se due di queste tre persone si conoscono, allora abbiamo trovato tre persone (contando anche A), le quali si conoscono tutte reciprocamente. Se questo non è il caso, tutte queste tre persone non si conoscono reciprocamente, e quindi giungiamo comunque alla conclusione. □

Esempio 2 *Siano dati 11 numeri casualmente estratti da* $\{1, \ldots, 20\}$. *Dimostrare che possiamo scegliere due tra questi, la cui differenza vale* 5.

Soluzione. Costruiamo i seguenti cinque cassetti:

- $\{1, 6, 11, 16\}$
- $\{2, 7, 12, 17\}$
- $\{3, 8, 13, 18\}$
- $\{4, 9, 14, 19\}$
- $\{5, 10, 15, 20\}$

Per il principio dei cassetti sappiamo che esistono tre numeri (tra gli 11 estratti casualmente) che appartengono allo stesso cassetto. Ci si convince ora facilmente del fatto che, se abbiamo tre numeri appartenenti a uno dei cassetti definiti sopra, ve ne sono almeno due la cui differenza è proprio cinque. □

Per concludere con la sezione teorica vogliamo enunciare un'altra formulazione del principio dei piccioni. Prima di farlo ricordiamo una notazione piuttosto utile: il simbolo $\lceil x \rceil$ indica la *parte intera superiore* del numero reale x, cioè il più piccolo numero intero maggiore o uguale a x. Ad esempio: $\lceil 3{,}2 \rceil = 4$, $\lceil -2{,}999 \rceil = -2$ e $\lceil 5 \rceil = 5$.

> Se p perle vengono distribuite su n cassetti, allora almeno un cassetto contiene almeno $\lceil p/n \rceil$ perle.

È un utile esercizio provare a dimostrare che le due formulazioni che abbiamo presentato sono equivalenti.

2 Esercizi

Primi passi

2.1 Tra 13 persone ve ne sono sempre almeno due nate nello stesso mese.

2.2 Abbiamo un gruppo di 30 persone. È vero che vi sono forzatamente tre persone che compiono gli anni nello stesso mese?

2.3 Qual è il numero minimo di persone con il quale si può essere certi che

   a) due

   b) tre

   c) n

   persone festeggino il compleanno lo stesso giorno?

2.4 Abbiamo un sacco con quattro paia di calze di differenti colori. Non potendo riconoscere i colori all'interno del sacchetto, quante calze dobbiamo estrarre prima di essere certi di avere una coppia di calze dello stesso colore?

2.5 Scegliamo dall'insieme $\{1, 2 \ldots, 10\}$ sei numeri casualmente. Dimostrare che fra questi è possibile sceglierne due la cui somma sia 11.

2.6 Dodici persone hanno lanciato due dadi a testa. Dimostrare che almeno due persone hanno ottenuto la stessa somma dei punteggi dei due dadi.

Avanzato

2.7 Su ciascuna casella di un quadrato 3×3 è scritto $-1, 0$ oppure 1. Calcoliamo le somme su ogni riga, colonna e diagonale. Dimostrare che una di tali somme compare almeno due volte.

2.8 In una stanza si trovano n persone, le quali si salutano reciprocamente. Dimostrare che in ogni istante esistono due persone che hanno salutato lo stesso numero di persone.

2.9 Nel piano consideriamo cinque punti con coordinate intere. Determiniamo poi il punto medio relativo a ciascuna coppia di punti. Dimostrare che almeno uno tra questi punti medi ha coordinate intere.

2.10 Scegliamo casualmente 11 numeri da $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Dimostrare che tra di essi vi sono sempre due numeri tali che uno sia multiplo dell'altro.

Olimpiade

2.11 Sia dato un quadrilatero convesso. Disegnamo il cerchio di Talete corrispondente a ciascun lato. Dimostrare che questi quattro cerchio ricoprono interamente il quadrilatero.

2.12 Abbiamo un sistema di coordinate infinito, nel quale ogni punto a coordinate intere è colorato di rosso, blu oppure verde. Dimostrare che esiste un rettangolo (con lati paralleli agli assi del sistema), i cui vertici hanno tutti lo stesso colore.

2.13 Su una griglia 11×9 vengono posizionati tutti i numeri da 1 fino a 99. Dimostrare che esistono due caselle adiacenti la cui differenza vale almeno 6.

2.14 Siano dati $r + 1$ numeri naturali aventi complessivamente r fattori primi distinti. Dimostrare che è possibile scegliere alcuni di questi numeri in modo tale che il loro prodotto sia un numero quadrato.

Sfide

2.15 Sia M un insieme di 1985 numeri naturali distinti tale che nessuno di essi possieda fattori primi maggiori di 23. Dimostrare che è possibile scegliere quattro elementi di M il cui prodotto sia una quarta potenza.

2.16 Scriviamo i numeri da 1 fino a 100 in ordine casuale su una lavagna. Dimostrare che è possibile cancellare 90 di questi numeri in modo tale che rimanga una sequenza crescente oppure decrescente.

2.17 (IMO 1978, #6) Una società internazionale accoglie membri da sei diverse nazioni. I membri sono numerati da 1 fino a 1978. Dimostrare che esiste un membro per il quale almeno una delle due condizioni seguenti è soddisfatta:

1) il suo numero è la somma dei numeri di due membri della sua nazione,

2) il suo numero è il doppio di quello di un membro della sua nazione.

3 Esercizi dalle Olimpiadi passate

I problemi apparsi alle Olimpiadi negli anni passati sono molto adatti alla preparazione. Il loro livello di difficoltà corrisponde a quello dell'esame, inoltre tutte le soluzioni possono essere reperite sul sito https://mathematical.olympiad.ch. Ricordatevi però di tentare a risolvere i problemi da soli, prima di ricorrere alle soluzioni!

1. **(Turno preliminare 2008, #1)** Siano dati cinque divisori positivi di 10^{2008}. Dimostrare che tra di essi ne esistono due il cui prodotto è un quadrato.
2. **(Turno preliminare 2013, #1)** Un gruppo di 2013 persone si siede equamente spartito a un tavolo rotondo. Dopo essersi seduti, osservano che presso ogni posto c'è una targhetta con un nome e che nessuno si è seduto al posto con il proprio nome. Dimostrare che è possibile ruotare il tavolo in modo che almeno due persone abbiano di fronte a sé la targhetta corretta.
3. **(Turno preliminare 2011, #3)** Su una lavagna sono scritti 11 numeri naturali. Dimostrare che è possibile scegliere alcuni numeri (eventualmente tutti) e porre fra loro dei segni $+$ e $-$ in modo che il risultato sia divisibile per 2011.
4. **(Turno preliminare 2010, #5)** Una croce svizzera consiste in cinque quadrati unitarî, uno centrale e quattro laterali adiacenti. Determinare il più piccolo numero naturale n con la seguente caratteristica: presi comunque n punti all'interno o sul bordo di una croce svizzera, ne esistono due con distanza minore di 1.
5. **(Turno finale 2013, #5)** Ciascuno di $2n + 1$ studenti sceglie un insieme finito, non vuoto e costituito di numeri interi successivi. Due studenti sono amici, qualora abbiano scelto entrambi uno stesso numero. Ciascuno studente ha almeno n amici. Dimostrare che esiste uno studente che è amico di tutti.