Principe des tiroirs

Actualisé: 18 septembre 2016
vers. 1.1.0

1 Exercices

Mise en jambes

1.1 Parmi treize personnes, au moins deux sont nées le même mois.
Solution : Tiroirs : les mois, chaussettes : les personnes $\Rightarrow$ 13 chaussettes dans 12 tiroirs $\Rightarrow$ Dans un tiroir il y a au moins 2 perles resp. personnes.

1.2 Dans un groupe de 30 personnes, est-il toujours possible de trouver trois personnes qui ont leur anniversaire le même mois ?
Indication : Voir l'exercice précédent.

1.3 De combien de personnes au minimum a-t-on besoin pour affirmer que

a) deux
b) trois
c) n

d'entre elles sont nées le même jour ?
Indication : Qu'est-ce qui est équivalent aux mois des deux exercices précédents ?

1.4 On dispose d'un sac de chaussettes de quatre couleurs différentes. Combien de chaussettes faut-il sortir du sac pour être certain d'obtenir une paire de la même couleur ?
Solution : 5

1.5 On choisit six nombres parmi $\{1, 2 \ldots, 10\}$. Montrer que l'on peut ensuite en trouver deux parmi les six dont la somme vaut onze.
Indication : Trouve des tiroirs tels que si on prend deux nombres différents dans le même tiroir ils ont pour somme 11.

1.6 Douze personnes ont lancé deux dés. Montrer que deux personnes ont obtenu la même somme.
Solution : Tiroirs : valeurs possibles pour la somme, chaussettes : personnes $\Rightarrow$ 11 tiroirs, 12 chaussettes $\Rightarrow$ au moins 2 chaussettes dans le même tiroir.

Avancé

1.7 Sur chaque case d'une grille 3×3 est inscrit $-1, 0$ ou 1. Montrer que parmi les lignes, colonnes et diagonales, on peut en trouver deux telles que la somme de leurs chiffres sont égales.

Indication : Tiroirs : Les différentes valeurs des sommes.

1.8 Dans une salle, n personnes sont en train de se saluer en se serrant la main. Montrer qu'à tout instant on peut trouver deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

Tipp : Tiroirs : nombre possible de personnes que l'on a déjà salué. Malheureusement il y a autant de tiroirs que de chaussettes. Pour conclure il faut trouver deux tiroirs qui s'excluent mutuellement, i.e. deux tiroirs tels qu'il est impossible qu'il y ait simultanément une chaussette dans les deux.

1.9 On se donne cinq points à coordonnées entières dans le plan. Montrer que l'on peut toujours en choisir deux parmi les cinq tels que le milieu du segment qu'ils forment est aussi un point à coordonnées entières.

Indication : Que peut-on dire des coordonnées en x resp. en y des deux points si la coordonnée en x resp. en y de leur milieu est entière ?

1.10 On choisit onze nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Montrer qu'il en existe toujours un qui est un multiple de l'autre.

Indication : Semblable à 1.5

Olympiade

1.11 On se donne un quadrilatère convexe quelconque et on considère les quatre cercles dont les côtés du quadrilatère sont les diamètres. Montrer que ces quatre cercles recouvrent le quadrilatère.

Indication : Réfléchis à ce que cela implique pour l'angle en un point que d'être à l'intérieur d'un de ces cercles.

1.12 Chaque point du plan est coloré en rouge, vert ou bleu. Montrer qu'il existe un rectangle dont les quatre sommets ont la même couleur.

Indication : Travaille à l'intérieur d'un rectangle $4 \times (3^4 + 1)$.

1.13 Sur les cases d'un échiquier de taile 11×9 sont écrits tous les nombres de 1 à 99. Montrer qu'il existe deux cases voisines dont la différence des nombres inscrits est au moins six.

Indication : Considère un chemin de longueur minimal qui relie 1 à 99.

1.14 Soient $n + 1$ nombres naturels, dont seulement n nombres premiers distincts apparaissent dans les décompositions en facteurs premiers de ces nombres. Montrer que l'on peut choisir certains de ces nombres et les multiplier pour obtenir un carré parfait.

Indication : Réfléchis pourquoi tu peux trouver deux produits différents tels que le produit de ces deux nombres donne un carré parfait. Ensuite il faut encore voir ce qu'on fait avec les termes qui apparaissent dans les deux produits.