Schubfachprinzip

Aktualisiert: 4. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Theorie

Das Dirichletsche Schubfachprinzip sagt Folgendes aus:

> Werden $k \cdot n + 1$ Perlen auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach $k + 1$ oder mehr Perlen.

Trotz seiner Einfachheit hat es erstaunlich viele Anwendungen. Viele Existenzbehauptungen über endliche Mengen sind mit dem Schubfachprinzip beweisbar. Die Hauptschwierigkeit ist dabei die Identifizierung der 'Perlen' und der 'Schubfächer'.

Beispiel 1. *Unter sechs Personen gibt es stets drei, die sich gegenseitig kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.*

Beweis. Wir betrachten eine beliebige dieser sechs Personen und untersuchen, wie viele der anderen fünf Personen sie kennt bzw. nicht kennt. Zusätzlich wollen wir die Person A nennen. Nach dem Schubfachprinzip gibt es unter den anderen fünf Personen mindestens drei, die A alle kennt oder alle nicht kennt. Angenommen, es sind drei Personen, die A alle kennt. Nun überlegen wir uns Folgendes: Wenn sich zwei dieser drei Personen gegenseitig ebenfalls kennen, dann haben wir zusammen mit A drei Personen gefunden, sie sich alle gegenseitig kennen. Falls das nicht der Fall ist, dann kennen sich jene drei Personen alle gegenseitig nicht, aber dann sind wir ebenfalls fertig. $\square$

Beispiel 2. *Gegeben seien 11 zufällige Zahlen aus* $\{1, \ldots, 20\}$. *Zeige, dass wir zwei Zahlen davon auswählen können, deren Differenz 5 beträgt.*

Beweis. Wir bilden die folgenden 5 Schubfächer:

- $\{1, 6, 11, 16\}$
- $\{2, 7, 12, 17\}$
- $\{3, 8, 13, 18\}$
- $\{4, 9, 14, 19\}$
- $\{5, 10, 15, 20\}$

Nach dem Schubfachprinzip wissen wir nun, dass sich unter den 11 zufälligen Zahlen mindestens 3 befinden, die zum selben Schubfach gehören. Man überlegt sich jetzt leicht, dass wenn wir aus einem der obigen Schubfächer mindestens 3 Zahlen haben, dass sich dann darunter auch zwei befinden, deren Differenz 5 beträgt. $\square$

2 Aufgaben

Einstieg

2.1 Unter 13 Personen gibt es stets zwei, die im selben Monat geboren sind.

2.2 Wir haben eine Gruppe von 30 Personen. Gibt es zwingendermassen drei Personen, die im selben Monat Geburtstag haben?

2.3 Wie viele Personen braucht es mindestens, damit von diesen sicher

a) zwei

b) drei

c) n

am gleichen Tag Geburtstag haben?

2.4 Wir haben einen Sack mit vier Paar Socken in verschiedenen Farben. Wir können jedoch die Farben im Sack nicht erkennen. Wie viele Socken müssen wir rausnehmen, um mindestens ein gleichfarbiges Sockenpaar zu haben?

2.5 Wir wählen aus der Menge $\{1, 2 \ldots, 10\}$ zufällig 6 Zahlen. Zeige, dass man von diesen zwei Zahlen auswählen kann, deren Summe 11 ist.

2.6 Zwölf Personen haben jeweils 2 Würfel geworfen. Zeige, dass mindestens zwei Personen die gleiche Augensumme gewürfelt haben.

Fortgeschritten

2.7 Auf einem 3×3 Quadrat steht auf jedem Feld entweder eine $-1, 0$ oder 1. Wir berechnen von jeder Zeile, Spalte und Diagonale die Summe. Zeige, dass eine Summe mindestens zweimal auftritt.

2.8 In einem Raum befinden sich n Personen, die sich gerade begrüssen. Zeige, dass zu es jedem Zeitpunkt zwei Personen gibt, die genau gleich viele Personen begrüsst haben.

2.9 Wir haben 5 Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. Von je zwei Punkten bestimmen wir den Mittelpunkt. Zeige, dass mindestens einer dieser Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten hat.

2.10 Wir wählen zufällig elf Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Zeige, dass es darunter immer zwei Zahlen gibt, sodass die eine ein Vielfaches der anderen ist.

Olympiade

2.11 Gegeben sei ein konvexes Viereck. Wir zeichnen über jeder Seite den entsprechenden Thaleskreis ein. Zeige, dass die vier Kreise das Viereck komplett überdecken.

2.12 Wir haben ein unendlich grosses Koordinatensystem, in dem jeder Gitterpunkt entweder rot, blau oder grün eingefärbt ist. Zeige, dass es ein Rechteck gibt (Seiten parallel zum Koordinatensystem), dessen Eckpunkte alle dieselbe Farben haben.

2.13 Auf einem 11×9 Rechteck sind alle Zahlen von 1 bis 99 eingetragen. Zeige, dass es zwei benachbarte Felder gibt, deren Differenz mindestens 6 beträgt.

2.14 Es seien $r+1$ natürliche Zahlen gegeben mit insgesamt nur r verschiedenen Primteilern. Zeige, dass es eine Teilmenge der Menge dieser Zahlen gibt, so dass deren Produkt eine Quadratzahl ist.

3 Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Alte Prüfungsaufgaben sind für die Vorbereitung sehr geeignet; einerseits entsprechen sie natürlich dem Prüfungsniveau, und andererseits sind alle Lösungen zu den Aufgaben auf der Homepage `www.imosuisse.ch` zu finden. Man sollte jedoch immer zuerst selbst an den Aufgaben gearbeitet haben, bevor man sich die Musterlösungen dazu anschaut!

1. **(Vorrunde 2008, 1.)** Gegeben sind fünf positive Teiler von 10^{2008}. Zeige, dass es zwei dieser Teiler gibt, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

2. **(Vorrunde 2013, 1.)** Eine Gruppe von 2013 Leuten setzt sich gleichmässig verteilt an einen runden Tisch. Nachdem sie sich hingesetzt haben, bemerken sie, dass an jedem Platz ein Namensschild steht und dass sich niemand an den Platz mit seinem Namen gesetzt hat. Zeige, dass sie den Tisch so drehen können, dass mindestens zwei Personen das richtige Namensschild vor sich haben.

3. **(Vorrunde 2011, 3.)** An der Tafel stehen 11 natürliche Zahlen. Zeige, dass man aus diesen Zahlen einige (vielleicht alle) wählen und dazwischen die Zeichen $+$ und $-$ so platzieren kann, dass das Ergebnis durch 2011 teilbar ist.

4. **(Vorrunde 2010, 5.)** Ein Schweizerkreuz besteht aus fünf Einheitsquadraten, einem zentralen und vier seitlich angrenzenden. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Punkten im Innern oder auf dem Rand eines Schweizerkreuzes gibt es stets zwei, deren Abstand kleiner als 1 ist.

5. **(Finalrunde 2013, 5.)** Jeder von $2n+1$ Schülern wählt eine endliche, nichtleere Menge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Zwei Schüler sind befreundet, falls sie eine gemeinsame Zahl ausgewählt haben. Jeder Schüler ist mit mindesten n anderen Schülern befreundet. Zeige, dass es einen Schüler gibt, welcher mit allen anderen befreundet ist.