Principe des tiroirs

Actualisé: 2 décembre 2017
vers. 1.1.1

1 Theorie

Le principe des tiroirs de Dirichlet s'énnonce ainsi :

> Si on partage $k \cdot n + 1$ perles dans n tiroirs, alors un tiroir contient au moins $k + 1$ perles.

Malgré sa facilité apparente, il a beaucoup d'utilisations, notament des preuves d'existence parmi des ensembles finis ou le résultat de densité de Kronecker par exemple. La difficulté principale réside dans l'identification des perles et des tiroirs.

Exemple 1. *Parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent toutes entre elles ou trois qui ne se connaissent pas entre elles.*

Démonstration. On commence par considérer une de ces personnes et on essaie de déduire quelque chose sur les personnes qu'elle connait ou non. Il y a deux tiroirs, "connait" ou "ne connait pas", et cinq perles qui sont les cinq liens de la personne selectionnée avec les cinq autres personnes. Ainsi, une personne donnée connait au moins trois personnes ou ne connait pas au moins trois personnes. Sans perte de généralité, on suppose que la personne sélectionnée connait trois autres personnes. Si deux de ces trois personnes se connaissent alors on a fini en prenant ces deux personnes avec la première. Autrement ces trois personnes ne se connaissent pas entre elles et donc on a aussi terminé.
Pour un exercice de ce genre, il est plus commode de représenter les personnes par six points sur une feuille et les liens "connait" et "ne connait pas" en reliant les différents points par des segments de deux couleurs. On veut ainsi montrer que, peu importe les couleurs que l'on donne aux quinze segments, il y a toujours un triangle dont tous les côtés ont la même couleur. □

Exemple 2. *Soient onze nombres choisis dans l'ensemble* $\{1, \ldots, 20\}$*. Montrer que l'on peut choisir deux nombres parmi les onze tels que la différence des deux vaut cinq.*

Démonstration. On construit les cinq tiroirs suivants :

- $\{1, 6, 11, 16\}$
- $\{2, 7, 12, 17\}$
- $\{3, 8, 13, 18\}$
- $\{4, 9, 14, 19\}$
- $\{5, 10, 15, 20\}$

Par le principe des tiroirs, on va choisir au moins trois nombres dans le même tiroir (noter que les tiroirs sont disjoints). On peut ensuite facilement se convaincre qu'en choisissant trois nombres dans

le même tiroir, il y en aura deux dont la différence fera cinq.
Dans cet exemple, l'identification des tiroirs est plus compliquée que dans l'exemple précédent. □

2 Exercices

Mise en jambes

2.1 Parmi treize personnes, au moins deux sont nées le même mois.

2.2 Dans un groupe de 30 personnes, est-il toujours possible de trouver trois personnes qui ont leur anniversaire le même mois ?

2.3 De combien de personnes au minimum a-t-on besoin pour affirmer que

a) deux

b) trois

c) n

d'entre elles sont nées le même jour ?

2.4 On dispose d'un sac de chaussettes de quatre couleurs différentes. Combien de chaussettes faut-il sortir du sac pour être certain d'obtenir une paire de la même couleur ?

2.5 On choisit six nombres parmi $\{1, 2 \ldots, 10\}$. Montrer que l'on peut ensuite en trouver deux parmi les six dont la somme vaut onze.

2.6 Douze personnes ont lancé deux dés. Montrer que deux personnes ont obtenu la même somme.

Avancé

2.7 Sur chaque case d'une grille 3×3 est inscrit $-1, 0$ ou 1. Montrer que parmi les lignes, colonnes et diagonales, on peut en trouver deux telles que la somme de leurs chiffres sont égales.

2.8 Dans une salle, n personnes sont en train de se saluer en se serrant la main. Montrer qu'à tout instant on peut trouver deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

2.9 On se donne cinq points à coordonnées entières dans le plan. Montrer que l'on peut toujours en choisir deux parmi les cinq tels que le milieu du segment qu'ils forment est aussi un point à coordonnées entières.

2.10 On choisit onze nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Montrer qu'il en existe toujours un qui est un multiple de l'autre.

Olympiade

2.11 On se donne un quadrilatère convexe quelconque et on considère les quatre cercles dont les côtés du quadrilatère sont les diamètres. Montrer que ces quatre cercles recouvrent le quadrilatère.

2.12 Chaque point du plan est coloré en rouge, vert ou bleu. Montrer qu'il existe un rectangle (avec les côtés parallèles aux axes) dont les quatre sommets ont la même couleur.

2.13 Sur les cases d'un échiquier de taille 11×9 sont écrits tous les nombres de 1 à 99. Montrer qu'il existe deux cases voisines dont la différence des nombres inscrits est au moins six.

2.14 Soient $n + 1$ nombres naturels, dont seulement n nombres premiers distincts apparaissent dans les décompositions en facteurs premiers de ces nombres. Montrer que l'on peut choisir certains de ces nombres et les multiplier pour obtenir un carré parfait.

2.15 (IMO) Les membres d'une société internationale sont originaires de six pays différents. La liste des membres contient 1978 noms numérotés de un à 1978. Montrer qu'il y a un membre dont le numéro vaut la somme des numéros de deux autres membres venant du même pays ou le double du numéro d'un compatriote.

3 Exercices d'Olympiades précédentes

Les exercices des olympiades passées sont d'excellents entrainements pour l'examen. Tu en trouveras d'autres, leur solution, ainsi que l'ensemble des anciens examens sur `www.imosuisse.ch`. Il est par contre très important pour toi de longuement essayer avant d'aller consulter la solution !

1. **(Tour préliminaire 2008, 1)** Soient cinq diviseurs de 10^{2008}. Montrer qu'il existe deux diviseurs dont le produit est un carré parfait.
2. **(Tour préliminaire 2013, 1)** Un groupe de 2013 personnes s'assied autour d'une table ronde, en se répartissant de manière régulière. Une fois assises, ces personnes constatent qu'un carton indiquant un nom est posé à chacune des places et que personne ne s'est assis à la place où son nom figure. Montrer qu'elles peuvent tourner la table de sorte qu'au moins deux personnes se retrouvent avec le carton correct devant elles.
3. **(Tour préliminaire 2011, 3)** Il y a onze nombres naturels écrits sur un tableau noir. Montrer que l'on peut choisir certains d'entre eux (éventuellement tous) et placer les signes $+$ et $-$ entre eux de telle sorte que le résultat soit divisible par 2011.
4. **(Tour préliminaire 2010, 5)** Une croix suisse consiste en cinq carrés unité, un au centre et quatre aux côtés adjacents. Trouver le plus petit nombre naturel n qui a la propriété suivante : parmi n points quelconques à l'intérieur ou sur le bord de la croix suisse il y en a toujours deux qui sont à une distance inférieure à 1.
5. **(Tour final 2013, 5)** Dans une classe de $2n + 1$ élèves, chacun choisit un ensemble non vide de nombres entiers consécutifs. Deux élèves sont amis s'il existe un nombre qu'ils ont choisi tous les

deux. Chaque élève est ami avec au moins n autres élèves. Montrer qu'il existe un élève qui est ami avec tous les autres.