Periodizität - Lösungen

Aktualisiert: 21. März 2018
vers. 1.0.0

1. Einsetzen führt zu $f(x+2\omega) = \frac{2f(x)-5}{f(x)-2}$ und $f(x+4\omega) = f(x)$.

2. Einsetzen führt zu $a_5 = a_0$, $a_6 = a_1$, die Folge ist also periodisch und somit beschränkt.

3. Da die Folge aus unendlich vielen aufeinanderfolgenden Vierertupeln besteht und es nur endlich solche viele Vierertupel gibt, wird sie periodisch. Da die Folge auch rückwärts eindeutig definiert ist, hat sie keine Vorperiode. Somit kommen (c) und (d) vor. Ferner hat die Folge modulo 2 die Struktur $1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots$ und somit sind (a) und (b) nicht möglich.

4. Wir betrachten die Fibonacchizahlen modulo 10^2014. Da es unendlich viele Fibonaccizahlen gibt und nur endlich viele Restklassen, wird die Folge periodisch. Da für $a_{n-1} + a_n \equiv a_{n+1} \mod 10^2014$ ebenfalls $a_{n-1} \equiv -a_n + a_{n+1} \mod 10^2014$ gilt, ist die Folge auch rückwärts eindeutig definiert und hat somit keine Vorperiode. Insbesondere können wir die Folge rückwärts erweitern zu $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$. Da $0 \equiv 0 \mod 10^2014$, gibt es somit eine Fibonacchizahl, die mit 10^2014 Nullen endet.

5. ?

6. ?

7. Sei r_i der Rest von x_i bei Division durch m. Wir betrachten statt der Folge (x_i) die Folge (r_i). Mit Hilfe der Rekursionsformel lassen sich aus m aufeinanderfolgenden Folgegliedern das nächste, aber auch das vorhergehende ausrechnen. Solche m aufeinanderfolgende Glieder bestimmen daher die ganze Folge. Wegen $0 \leq r_i \leq m-1$ gibt es höchstens m^m verschiedene m-Tupel $(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+m-1})$ aufeinanderfolgender Folgeglieder. Nach dem Schubfachprinzip kommt eines dieser m-Tupel mehrfach in der Folge vor. Daraus folgt, dass die Folge periodisch ist ohne Vorperiode (man kann die Glieder rückwärts berechnen).
   Nehme an, dass m aufeinanderfolgende x_i durch m teilbar sind. Dann enthält die Folge (r_i) m aufeinanderfolgende Nullen und aus der Rekursionsformel folgt, dass alle Folgeglieder gleich Null sind, im Widerspruch zu $x_0 = r_0 = 1$.
   Andererseits lässt sich die Folge x_i rückwärts über x_0 hinaus fortsetzen. Die Formel $x_i = x_{i+m} - \sum_{j=1}^{m-1} x_{i+j}$ liefert nun leicht $x_{-1} = 1$ und weiter $x_{-2} = x_{-3} = \ldots = x_{-m} = 0$. Wegen der Periodizität von (r_i) gibt es daher $m-1$ aufeinanderfolgende Glieder in $(x_i)_{i\geq 0}$, die durch m teilbar sind.

8. Idee: Für $n \geq 2$ definiere $s_n =\mid a_n - a_{n-1} \mid$. Es folgt für $n \geq 5$, dass $s_n =\mid s_{n-1} - s_{n-3} \mid$. Folgere, dass diese Folge beschränkt ist. Zeige nun via Widerspruch: Ist $\max\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}\} = T \geq 2$ für ein n, dann ist $\max\{s_{n+6}, s_{n+7}, s_{n+8}\} \geq T-1$.

   Setze nun $N = 13^13$ und bemerke $\max\{s_2, s_3 s_4\} \leq N$. Folgere induktiv, dass s_n für

$n \geq 6N + 2$ nur 0 oder 1 sein kann. Untersuche nun, welche Werte somit $a_{14^{14}}$ annehmen kann und betrachte die ursprüngliche Folge modulo 2, um die Lösung zu finden.

Eine vollständige Lösung findet man im Internet, ßhortlist 2001 solutions", Problem N3.