Periodizität

Aktualisiert: 21. März 2018

vers. 1.0.1

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ eine Funktion für die eine Konstante ω existiert mit
$$f(x+\omega) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Zeige, dass f periodisch ist.

2. Die Folge a_n ist definiert durch $0 < a_0 < a_0 + a_1 < 1$ und
$$a_{n+1} + \frac{a_n - 1}{a_{n-1}} = 0, \qquad n \geq 1.$$
Zeige, dass die Folge beschränkt ist.

3. In der Folge $1, 9, 7, 7, 4, 7, 5, 3, 9, 4, 1, \ldots$ ist jede Ziffer ab der fünften die Summe der vier vorherigen Ziffern modulo 10. Welche der folgenden Zahlen kommen irgendwann nach dem 100ten Glied in der Folge vor?
(a) 1234, (b) 3269, (c) 1977, (d) 0197.

4. Gibt es eine Fibonacchizahl, die mit mindestens 2014 Nullen endet?

5. Berechne die Summe
$$\binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} \pm \ldots.$$

6. (TT 90) Für die reelle Folge $x_1, x_2, \ldots$ gilt
$$x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$
Beweise, dass die Folge Periode 9 hat.

7. (CH 04) Sei m eine natürliche Zahl grösser als 1. Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist definiert durch $x_i = 2^i$ für $0 \leq i \leq m-1$ und
$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i-j}, \qquad i \geq m.$$
Finde das grösste k, sodass es k aufeinanderfolgende Folgeglieder gibt, die alle durch m teilbar sind.

8. (Shortlist 01) Definiere die Folge a_n durch $a_1 = 11^{11}$, $a_2 = 12^{12}$, $a_3 = 13^{13}$ und
$$a_{n+3} = |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n|, \qquad n \geq 1.$$
Finde $a_{14^{14}}$.