Périodicité

Actualisé: 21 mars 2018

vers. 1.0.1

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ une fonction pour laquelle il existe une constante ω avec
$$f(x+\omega) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que f est périodique.

2. La suite a_n est définie par $0 < a_0 < a_0 + a_1 < 1$ et
$$a_{n+1} + \frac{a_n - 1}{a_{n-1}} = 0, \qquad n \geq 1.$$
Montrer que la suite est bornée

3. Dans la suite $1, 9, 7, 7, 4, 7, 5, 3, 9, 4, 1, \ldots$, chaque chiffre depuis le cinquième est la somme de les quatres dernières chiffres modulo 10. Lesquels parmi ces nombres apparaîtront dans la suite au moins une fois après le 100ème terme ?
(a) 1234, (b) 3269, (c) 1977, (d) 0197.

4. Existe-t-il un nombre de Fibonacci, qui finit par au moins 2014 zéros ?

5. Calculer la somme
$$\binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} \pm \ldots.$$

6. (TT 90) Dans la suite réelle $x_1, x_2, \ldots$ on a
$$x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$
Montrer que la suite a une période de 9.

7. (CH 04) Soit m un nombre naturel plus grand que 1. La suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ est définie par $x_i = 2^i$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et
$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i-j}, \qquad i \geq m.$$
Trouver le plus grand k tel qu'il y a k termes consécutifs qui soient divisibles par m.

8. (Shortlist 01) Définissons la suite a_n par $a_1 = 11^{11}$, $a_2 = 12^{12}$, $a_3 = 13^{13}$ et
$$a_{n+3} = |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n|, \qquad n \geq 1.$$
Trouver $a_{14^{14}}$.