Muster suchen - Lösungen

Aktualisiert: 12. Dezember 2015

vers. 1.0.1

1. Die Folge (a_n) ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$ für $n \geq 2$. Zeige, dass alle a_n ganze Zahlen sind.

   Lösung: $a_{n+1} \cdot a_{n-1} > {a_n}^2$ also folgt daraus, dass wenn $a_{n-1} \leq a_n$ führt zu $a_{n+1} > a_n$ und da $a_2 \geq a_1$ gilt dies für alle a_n. Als nächstes rechnen wir die ersten Terme aus und erhalten $a_3 = 3, a_4 = 11, a_5 = 41$ und $a_6 = 153$. Genaueres Betrachten legt die Vermutung nahe, dass $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. Nun setzen wir dies in die Gleichung ein, um herauszufinden, was es bedeuten würde:

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_{n-1} \cdot (4a_n - a_{n-1}) = a_n^2 + 2$$
$$\iff a_{n-1}^2 + a_n^2 - 4a_{n-1}a_n + 2 = 0$$

   Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$a_n = 2a_{n-1} + \sqrt{3a_{n-1}^2 - 2}, \quad a_{n-1} = 2a_n - \sqrt{3a_n^2 - 2}.$$

   Die anderen Lösungen können ausgeschlossen werden, da $a_n > a_{n-1}$ ist. Per Induktion wollen wir nun zeigen, dass dies wirklich die Lösung ist.
   Es stimmt für $n = 3$, denn $a_3 = 2 + \sqrt{3 - 2} = 3$. Nehmen wir nun an, es stimme für alle Zahlen kleiner gleich n. Dann ist

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{a_n - 1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n - \sqrt{3a_n^2 - 2}} = \frac{(a_n^2 + 2)(2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2})}{a_n^2 + 2} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}.$$

   Umformen der Gleichung $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ ergibt

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 - 4a_{n+1}a_n + 2 = 0$$

   und somit ist auch $a_n = 2a_{n+1} - \sqrt{3a_{n+1}^2 - 2}$ und die Induktion abgeschlossen. Nun sei a_k das erste Glied der Folge, welches keine ganze Zahl ist. Wir wissen nun einerseits, dass $a_k = \frac{a_{k-1}^2+2}{a_{k-2}}$, also, dass a_k eine rationale Zahl ist. Andererseits wissen wir auch, dass $a_k = 2a_{k-1} - \sqrt{a_{k-1}^2 - 2}$, also entweder eine ganze (was per Definition von a_k nicht sein kann) oder eine irrationale Zahl ist. a_k kann nicht gleichzeitig rational und irrational sein, daher wissen wir, dass solch eine Zahl nicht existiert und somit sind alle Zahlen der Folge ganz.

2. Sei $n \geq 1$ ganz. Beweise, dass es eine n-stellige natürliche Zahl gibt, die nur aus den Ziffern 1 und 2 besteht, und die durch 2^n teilbar ist.

Lösung: Wieder arbeiten wir mit Induktion. Für $n = 1$ ist die Zahl 2, nehmen wir an, dass es eine n-stellige Zahl a_n gibt, die die Bedingungen erfüllt. Wir können a_{n+1} wie folgt konstruieren:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2 \cdot 10^n, & \text{falls } 2^{n+1} \mid a_n \\ a_n + 10^n, & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Dies ergibt immer eine richtige Lösung, da im ersten Fall sowohl a_n als auch $2 \cdot 10^n$ durch 2^{n+1} teilbar sind, also auch deren Summe. Im zweiten Fall sind beide nicht durch 2^{n+1} teilbar, jedoch durch 2^n, also ist die Summe auch durch 2^{n+1} teilbar.

3. (CH 05) Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Finde alle möglichen Werte des Ausdrucks

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}.$$

Lösung: Durch Erweitern ergibt sich

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{(1+b)\cdot a}{(1+b+bc)\cdot a} + \frac{(1+c)\cdot ab}{(1+c+ca)\cdot ab} = \frac{2(1+a+ab)}{1+a+ab} = 2.$$

4. Zeige, dass 8100090001 keine Primzahl ist.

Lösung: $8100090001 = 8100000000 + 90000 + 1 = 300^4 + 300^2 + 1$ und alle Zahlen der Form $x^4 + x^2 + 1$ sind faktorisierbar, denn

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

5. (IMO 05) Für $n \geq 1$ sei

$$a_n = 6^n + 3^n + 2^n - 1.$$

Finde alle natürlichen Zahlen, die teilerfremd sind zu allen a_n.

Lösung: Für $p = 2, 3$ ist es offensichtlich, dass es eine Lösung gibt. Nun schauen wir für jede Primzahl q den Ausdruck

$$6(6^{q-2} + 3^{q-2} + 2^{q-2} - 1) \equiv 6^{q-1} + 2 \cdot 3^{q-1} + 3 \cdot 2^{q-1} - 6 \equiv 0 \pmod q$$

Da 6 teilerfremd zu allen Primzahlen, die nicht 2 oder 3 sind, ist, ist der Ausdruck durch q teilbar, wenn man $n = q - 2$ setzt. Somit ist die einzige teilerfremde Zahl 1.

6. Für die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gelte

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \qquad \text{für alle } m \geq n \geq 0.$$

Ausserdem sei $a_1 = 1$. Finde a_{2006}.

Lösung: Als erstes setzen wir $m = n = 0$ und erhalten so $a_0 = 0$. Dann setzen wir $n = 0$ und so erhalten wir $a_{2m} = 4a_m$. Wenn wir $n = m - 1$ setzen, erhalten wir

$$a_{2m-1} = \frac{a_{2m} + a_{2m-2}}{2} - a_1 = 2a_m + 2a_{m-1} - 1.$$

Durch das Ausrechnen von den ersten Werten der Folge ergibt sich die Vermutung, dass $a_n = n^2$ ist, was auch für $n = 0, 1$ stimmt. Nehmen wir an, es stimmt für alle Zahlen kleiner als $2m - 1$. Dann ist

$$a_{2m-1} = 2(m^2 + (m-1)^2) - 1 = (2m-1)^2$$

und

$$a_{2m} = 4m^2 = (2m)^2.$$

Das heisst, es stimmt auch für alle Zahlen, die kleiner als $2(m+1) - 1$ sind, somit ist die Induktion fertig, und $a_{2006} = 2006^2$.

7. (IMO 81) Finde den grösstmöglichen Wert von $m^2 + n^2$, wobei $m, n \in \{1, 2, \ldots, 1981\}$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$(m^2 - mn - n^2)^2 = 1.$$

Lösung: Als erstes vereinfachen wir die Gleichung, indem wir die Wurzel ziehen und somit

$$m^2 - mn - n^2 = \pm 1$$

erhalten.

Wenn wir nun die ersten Werte für n und m einsetzen, legt sich die Vermutung nahe, dass je zwei aufeinanderfolgende Fibonacci Zahlen die Gleichung erfüllen. Und per Induktion können wir dies zeigen, denn für $(m, n) = (1, 1)$ ist $m^2 - mn - n^2 = -1$ und für $(m, n) = (2, 1)$ ist $m^2 - mn - n^2 = 1$. Nun seien m und n zwei aufeinanderfolgende Fibonacci zahlen, die die Gleichung erfüllen und $m >= n$, dann ist $(m+n)^2 - (m+n)m - m^2 = -(m^2 - mn - n^2)$, erfüllt also die Gleichung auch. Dabei sehen wir, dass das Vorzeichen bei jeder Erhöhung gedreht wird.
Nun wollen wir noch zeigen, dass es für alle anderen $(n, m) = (a, b)$ nicht geht. Sei $a > b$, dann ist $b^2 - ba - a^2 < -ba \leq -1$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Wenn $a = b$, dann ist $-b^2 = \pm 1$, also $a = b = 1$, was auch keiner neuen Lösung entspricht. Sei also nun $(n, m) = (a, a + c)$ eine gültige Lösung, dann ist $(a + c)^2 - a(a + c) - a^2 = \pm 1$. Umformen ergibt $a^2 - ac - c^2 = \mp 1$, also wäre $(n, m) = (c, a)$ auch eine Lösung. Da wir wissen, dass $c > a$ oder $c = a = 1$ sein muss, wissen wir, dass wir m, n immer verkleinern können, es sei denn $m = n = 1$, also ist $m = n = 1$ der Startpunkt unserer Folge und sie fällt mit der Fibonaccifolge zusammen.
Da 1453 und 843 die beiden grössten Fibonacci Zahlen sind, die kleiner als 1981 sind, ist das grösste $m^2 + n^2 = 1453^2 + 843^2$.

8. (CH 04) Finde alle streng monotonen Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(f(n)) = 3n.$$

Lösung: Wenn wir die ersten Werte in die Funktion einsetzen, sehen wir, dass

$$f(3^x) = 2 \cdot 3^x, \quad f(2 \cdot 3^x) = 3^{x+1}.$$

$f(1) = 2$ und somit $f(2) = 3$ und $f(3) = 6$. Wir sehen nun, dass wenn

$$f(3^x) = 2 \cdot 3^x \implies f(2 \cdot 3^x) = f(f(3^x)) = 3 \cdot 3^x$$

und

$$f(2\cdot 3^x) = 3^x + 1 \implies f(3^{x+1}) = f(f(2\cdot 3^x)) = 2\cdot 3^{x+1}.$$

Somit ist die Induktion abgeschlossen. Da zwischen 3^x und $2\cdot 3^x$ genau 3^x Zahlen sind und $f(2\cdot 3^x) - f(3^x) = 3^x$ sind alle diese Werte definiert, denn sie müssen die aufeinanderfolgenden Zahlen sein.
Formal gesprochen gilt für diese Zahlen

$$f(k) = 2\cdot 3^x + k - 3^x, \qquad \text{wobei } k \text{ zwischen } 3^x \text{ und } 2\cdot 3^x \text{ liegt}$$

Wenn k zwischen $f(2\cdot 3^x)$ und $f(3^{x+1})$ liegt, ist $f(k)$ dadurch bestimmbar, dass $f(f(k))$ zwischen $f(3^{x+1})$ und $f(2\cdot 3^{x+1})$ liegt und somit ist $f(3^{x+1}+j) = 2\cdot 3^{x+1} + 3\cdot(k - 2\cdot 3^x) \Leftrightarrow j = 3\cdot(k - 2\cdot 3^x)$ und somit

$$f(k) = 3^{x+1} + 3\cdot(k - 2\cdot 3^x).$$