Muster suchen

Aktualisiert: 12. Dezember 2015
vers. 1.0.1

1. Die Folge (a_n) ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$ für $n \geq 2$. Zeige, dass alle a_n ganze Zahlen sind.
2. Sei $n \geq 1$ ganz. Beweise, dass es eine n-stellige natürliche Zahl gibt, die nur aus den Ziffern 1 und 2 besteht, und die durch 2^n teilbar ist.
3. (CH 05) Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Finde alle möglichen Werte des Ausdrucks
$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}.$$
4. Zeige, dass 8100090001 keine Primzahl ist.
5. (IMO 05) Für $n \geq 1$ sei
$$a_n = 6^n + 3^n + 2^n - 1.$$
Finde alle natürlichen Zahlen, die teilerfremd sind zu allen a_n.
6. Für die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gelte
$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \qquad \text{für alle } m \geq n \geq 0.$$
Ausserdem sei $a_1 = 1$. Finde a_{2006}.
7. (IMO 81) Finde den grösstmöglichen Wert von $m^2 + n^2$, wobei $m, n \in \{1, 2, \ldots, 1981\}$ die folgende Gleichung erfüllen:
$$(m^2 - mn - n^2)^2 = 1.$$
8. (CH 04) Finde alle streng monotonen Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$f(f(n)) = 3n.$$