Principe d'invariance

Actualisé: 1er décembre 2015

vers. 1.0.0

Si une opération donnée est effectuée de manière répétée, alors on peut chercher certaines grandeurs qui ne changent pas lors de ces opérations. De telles grandeurs s'appellent des *invariants*. Souvent on aimerait montrer qu'en partant d'une position initiale donnée, on ne peut pas atteindre une certaine position finale à travers une suite d'opérations. Il suffit alors de trouver un invariant qui prend une valeur différente au début qu'à la fin. Il s'ensuit directement qu'une telle suite d'opérations n'existe pas.

Exemple 1. *Soit n un nombre naturel. Les nombres $1, 2, \ldots, 4n$ sont écrits sur un tableau. On en choisit alors de manière répétée deux nombres arbitraires a et b, on les efface et on écrit à leur place $|a - b|$ sur le tableau. Montrer que le dernier nombre restant est toujours pair.*

Solution. On cherche une grandeur qui ne change pas lors de l'opération. Le seul changement est qu'on efface les nombres choisis a et b et qu'on les remplace par $|a - b|$. Tous les autres nombres restent inchangés sur le tableau. On peut supposer que $a \geq b$. On a alors $|a-b| = a-b$ et l'opération peut s'écrire comme $a, b \mapsto a - b$. En particulier la *somme* des nombres sur le tableau diminue de $-2b$, donc d'un nombre *pair*. Par conséquent, la somme *modulo* 2 est un invariant. Au début, elle vaut $1 + 2 + \ldots + 4n = 2n(4n + 1) \equiv 0 \pmod 2$. A la fin, elle est tout simplement le dernier nombre restant. Ainsi celui-ci est pair, ce qui confirme l'hypothèse de départ. $\square$

Parfois ce ne sont pas les invariants proprement dits qui sont intéressants, mais une grandeur qui augmente ou diminue lors de chaque opération. De telles grandeurs sont appelées des *monovariants*. Typiquement on aimerait montrer qu'une certaine suite d'opérations s'interrompt après un laps de temps fini. Alors il suffit par exemple de montrer qu'il existe une grandeur qui est toujours un nombre *entier* positif et qui diminue à chaque étape. Il est évident que cette grandeur ne peut être diminuée qu'un nombre fini de fois, sinon elle prendrait tôt ou tard des valeurs négatives. Ainsi le nombre d'opérations effectuées ne peut pas être infini. En voici un exemple.

Exemple 2. *Au parlement de Sikinia chaque député a tout au plus 3 ennemis. Montrer qu'on peut les répartir en deux chambres telles que chaque député ait tout au plus un ennemi dans sa chambre.*

Solution. Ici aucune opération n'est en vue. L'idée est d'en introduire une. Répartissons les députés de façon arbitraire en deux chambres. Ensuite effectuons l'opération suivante plusieurs fois de suite : si quelqu'un a au moins deux ennemis dans sa chambre, déplaçons-le dans l'autre chambre. Il faut encore montrer qu'on ne peut pas répéter cette opération à l'infini. Il s'ensuivra directement qu'à la fin chaque parlementaire aura au plus un seul ennemi dans sa chambre. Soit S le nombre d'hostilités, c'est-à-dire le nombre de paires non ordonnés de parlementaires qui se trouvent dans la même chambre tout en étant ennemis. Si un député P avec au moins deux ennemis change de maison, alors il perd au moins un ennemi. Après ce déplacement, deux parlementaires différents de P sont ennemis seulement s'ils l'étaient déjà auparavant. Or ça veut dire que S diminue d'au moins 1 à chaque opération. Comme $S \geq 0$, les déplacement doivent cesser après un laps de temps fini, et c'est ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Pour finir, on va traiter le cas d'un monovariant où ce n'est pas l'abandon d'une procédure qui est décisif.

Exemple 3. *Soient a, b, c des nombres entiers non tous identiques. Lors de chaque opération on remplace le triple (a, b, c) par le triple $(a - b, b - c, c - a)$. Montrer que les trois coordonnées ne peuvent pas toutes rester bornées à la fois.*

Solution. Soit (a_n, b_n, c_n) le triple après la $n$ième étape. Très clairement on a $a_n + b_n + c_n = 0$ si $n \geq 1$, mais cela n'aide pas directement. L'idée est de considérer (a_n, b_n, c_n) en tant que point dans l'espace tridimensionnel. Alors la distance à l'origine, ou plus simplement son carré A_n peut être une grandeur à considérer. On sait que

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 = (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_na_n = 2A_n - 2(a_nb_n + b_nc_n + c_na_n). \end{aligned}$$

De plus, si $n \geq 1$

$$0 = (a_n + b_n + c_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + 2(a_nb_n + b_nc_n + c_na_n).$$

En additionnant les équations, il s'ensuit que

$$A_{n+1} = 3A_n,$$

donc par induction $A_{n+1} = 3^n A_1$. Comme a, b, c ne sont pas tous identiques, on a $A_1 > 0$ et par conséquent A_n augmente à l'infini. Ainsi les trois coordonnées a_n, b_n, c_n ne peuvent pas toutes rester bornées à la fois. $\square$

Exercices

1. Un cercle est subdivisé en 6 secteurs dans lesquels se trouvent les chiffres $1, 0, 1, 0, 0, 0$ dans cet ordre. Un coup consiste à ajouter 1 aux chiffres de deux secteurs voisins. Est-il possible d'atteindre une distribution où tous les chiffres sont identiques ?
2. Soit un échiquier ordinaire. En une fois on peut changer la couleur de toutes les cases d'une colonne, d'une ligne ou d'un carré 2×2. Peut-on arriver à un échiquier avec une seule case noire ?
3. Chacun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vaut soit 1 soit -1. On a

   $$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

   Montrer que n est un multiple de 4.
4. Soient les trois nombres $3, 4, 12$. Un coup consiste à remplacer deux nombres a, b par $0.6a - 0.8b$ et $0.8a + 0.6b$. Est-ce possible d'arriver à $4, 6, 12$ en un nombre fini de coups ?

5. Sur la circonférence d'un cercle on a choisi n points. Sur chaque point il y a une pierre. Un coup consiste à déplacer deux pierres quelconques sur un point voisin dans des directions opposées. Le but est de placer toutes les pierres sur le même point. Quand est-ce que c'est possible ?
6. Chaque nombre $1, 2, \ldots, 10^6$ est remplacé par la somme de ses chiffres. Cette opération est répétée jusqu'à ce qu'on ait 10^6 nombres à un chiffre. Est-ce qu'on a alors plus de 1 ou plus de 2 ?
7. A chaque coin d'un dé on associe le nombre 1 ou -1. Sur chaque face on note le produit des quatre nombres des coins correspondants. Trouver toutes les valeurs possibles pour la somme de ces 14 nombres.
8. Sur une île on a une population de caméléons. 13 sont de couleur bleue, 15 de couleur blanche et 17 de couleur rouge. Quand deux caméléons de différentes couleurs se rencontrent ils prennent les deux la troisième couleur. Est-ce possible d'atteindre une population monochromatique ?
9. On a aligné 1000 nombres. On construit une deuxième ligne de la façon suivante : au-dessous de chaque nombre a de la première ligne on note le nombre de fois que a apparaît dans la première ligne.
   A partir de la deuxième ligne on construit la troisième et ainsi de suite. Montrer qu'à partir d'un certain nombre de lignes deux lignes successives coïncident.
10. (CH 04) Au tableau on a écrit une liste de nombres naturels. On effectue l'opération suivante de façon répétée : effacer deux nombres quelconques a, b et les remplacer par $\mathrm{pgdc}(a, b)$ et $\mathrm{ppmc}(a, b)$. Montrer qu'à partir d'un certain moment la liste ne change plus.
11. Les cases d'un tableau 4×4 sont remplies comme suit :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

   On peut changer à la fois les signes de tous les nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une parallèle à la diagonale. Montrer qu'on ne peut pas se débarrasser de tous les signes négatifs.
12. A un banquet il y a $2n$ invités. Chaque personne a au plus $n-1$ ennemis parmi les autres invités. Prouver qu'il est possible de placer ces $2n$ personnes autour d'une table de telle manière que personne ne soit assis près d'un ennemi.
13. Trois automates Q, R, S impriment des paires de nombres naturels sur des cartes. Pour l'entrée (x, y), Q, R, S sortent les cartes $(x-y, y), (x+y, y), (y, x)$ respectivement. Au début on a la carte $(1, 2)$. Peut-on fabriquer les cartes $(19, 79)$ et $(819, 357)$? Quels sont les couples (p, q) qu'on peut obtenir à partir de (a, b) ?
14. Sur chaque case d'un échiquier ordinaire il y a un nombre entier. Un coup consiste à choisir un carré 3×3 ou 4×4 quelconque et d'en augmenter tous les nombres par 1. Est-ce possible, pour chaque distribution initiale, d'arriver à une disposition avec tous les nombres divisibles par a) 2, b) 3 ?
15. (OMI 86) Dans chaque sommet d'un pentagone il y a un nombre entier tel que la somme des cinq nombres est positive. Soient x, y, z les nombres dans trois sommets successifs et soit $y < 0$. Alors on peut remplacer x, y, z par $x+y, -y, z+y$. Décider si on doit toujours s'arrêter après un nombre fini de pas.

16. 9 cases d'un tableau 10×10 sont contaminées. Chaque seconde toutes les cases voisines d'au moins deux cases contaminées se contaminent elles aussi. Est-ce possible que l'infection s'étale sur tout le tableau ?
17. Dans la suite $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ à partir du septième terme chaque nombre correspond à la somme des six nombres précédents modulo 10. Montrer que dans cette suite $\ldots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ ne va jamais apparaître.
18. (Kontsevitch) Considérer tous les points dans le plan avec des coordonnées entières. Les points $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2)$ sont marqués en rouge.
    (a) Sur tous ces six points rouges il y a un chip.
    (b) Il n'y a de chip que sur le point $(0, 0)$.

    Quand un chip se trouve sur le point (x, y) et les points $(x, y + 1)$ et $(x + 1, y)$ ne sont pas occupés, alors on peut enlever le chip du point (x, y) et en mettre un sur le point $(x, y+1)$ et un sur le point $(x+1, y)$. Est-ce possible dans les cas a) et b) respectivement d'enlever tous les chips des points rouges ?
19. (Conway) Considérer tous les points du plan avec des coordonnées entières. Sur tous les points (x, y) avec $y \leq 0$ il y a un chip. Avec un chip on peut sauter horizontalement ou verticalement par-dessus un autre chip sur un point voisin libre et enlever le chip par-dessus lequel on a sauté (saut de solitaire). Est-ce possible d'avoir un chip placé sur le point $(0, 5)$ après un nombre fini de sauts ?
20. (OMI 93) Sur un échiquier infini on joue le jeu suivant : au début on distribue n^2 pierres sur un carré $n \times n$ de telle manière que sur chaque case il y ait une pierre. Ensuite on peut effectuer de façon répétée des sauts de solitaire et enlever la pierre par-dessus laquelle on a sauté. Déterminer tous les nombres n pour lesquels on peut éliminer toutes les pierres sauf une.
21. Au début on a 4 triangles rectangles isométriques. Un coup consiste à choisir un triangle quelconque et le couper en deux parties le long de la hauteur de l'angle droit. Montrer qu'il est impossible d'arriver à une disposition dans laquelle il n'y a plus de triangles isométriques.
22. (OMI 2000) Soit $n \geq 2$ un nombre naturel. Au début n puces se trouvent sur une ligne horizontale, pas toutes sur le même point. Soit λ un nombre réel positif. Un *saut* est défini comme suit :

    On choisit deux puces se trouvant en A et B avec A à gauche de B. La puce en A saute sur le point C à droite de B avec $BC/AB = \lambda$.

    Déterminer toutes les valeurs de λ telles que pour chaque point M sur la ligne et chaque disposition initiale des n puces il existe une suite finie de sauts amenant toutes les puces sur des positions à droite de M.