MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Induzione

Aggiornato: 3 agosto 2021
vers. 2.1.2

Una delle tecniche di dimostrazione più importanti della matematica è l'*induzione*. Iniziamo con un'immagine che rende chiaro questo concetto. Come facciamo ad arrampicarci su una scala a pioli? Innanzitutto saliamo sul primo piolo, dopodiché ci spostiamo da ciascun piolo a quello successivo. Perciò, fintantoché siamo in grado

- di salire sul primo piolo,
- di salire sul piolo successivo,

raggiungeremo qualsiasi piolo, non importa quanto esso si trovi in alto.

Vorreste un'altra illustrazione dell'induzione? I bambini degli anni '90 si ricorderanno sicuramente della famosa trasmissione televisiva olandese *Domino Day*. Il principio consisteva nel battere, anno dopo anno, il record per il maggior numero di tessere del domino disposte in fila e fatte cadere. Gli appassionati dedicavano più di un mese al posizionamento delle tessere in vista del D-Day. Di che cosa devono assicurarsi i costruttori mentre dispongono le tessere? Dobbiamo per prima cosa assicurarci che la caduta di ciascuna tessera causi la caduta di quella successiva. Inoltre, deve essere possibile buttare giù la prima tessera della fila (questo era spesso il compito di un ospite famoso). Qualora entrambe queste condizioni siano soddisfatte, tutte le tessere del domino cadranno!

Giungiamo ora a una formulazione matematica del concetto di induzione. Per ogni numero intero $n \geq 1$ consideriamo una proposizione $A(n)$. Ciò significa che $A(n)$ è un'affermazione matematica che dipende da n. Ecco alcuni esempi di affermazione:

1. $A(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$,
2. $B(n)$: *il numero n è pari,.*
3. $C(n)$: *esiste un numero primo p tale che $n \leq p < 2n$.*

Un'affermazione può essere vera oppure falsa. Per esempio, $B(n)$ è vera se e solo se esiste un numero intero k tale che $n = 2k$. L'affermazione $A(n)$ vale per ogni $n \geq 1$ e l'affermazione $C(n)$ vale per ogni $n \geq 2$ (questo è un famoso risultato di teoria dei numeri noto come *postulato di Bertrand*).

Supponiamo di voler dimostrare che l'affermazione $A(n)$ è vera a partire dal numero intero n_0, cioè per ogni $n \geq n_0$. Come procediamo? Potremmo ad esempio cominciare dimostrando che $A(n_0)$ è vera (saliamo sul primo piolo). In un secondo tempo possiamo proseguire mostrando che, se $A(n)$ è vera, necessariamente anche $A(n + 1)$ è vera (da ciascun piolo passiamo a quello successivo). Ne consegue che tutte le affermazioni $A(n)$ con $n \geq n_0$ sono vere (possiamo salire la scala fino a dove vogliamo).

Questo schema viene indicato come *dimostrazione per induzione*. In principio, una dimostrazione per induzione contiene dunque due passi, i quali vengono riassunti nel prossimo teorema.

Teorema 1 (Induzione classica) *Sia $A(n)$ un'affermazione e n_0 un numero intero. Supponiamo che*

1. *ancoraggio (o caso/passo base): $A(n_0)$ è vera,*
2. *passo induttivo: per ogni $n \geq n_0$ vale che*

$$A(n) \text{ è vera} \implies A(n+1) \text{ è vera.}$$

Allora l'affermazione $A(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Consideriamo alcuni esempi.

Esempio 1 *Dimostrare che per ogni numero intero $n \geq 1$ vale*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluzione. Per cominciare, scriviamo qual è la nostra affermazione in questo caso:

$$A(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Vogliamo mostrare che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$ ($n_0 = 1$). Applichiamo ora il classico schema con cui si conduce una dimostrazione per induzione.

1. **Ancoraggio**, cioè $A(1)$ è vera:

   L'affermazione $A(1)$ può venir scritta come segue

   $$A(1) : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

   Vediamo dunque che $A(1)$ è vera.

2. **Passo induttivo**, cioè $A(n) \implies A(n+1)$:

   Assumiamo che $A(n)$ sia vera dimostriamo che sotto quest'ipotesi anche $A(n+1)$ lo è. L'affermazione $A(n+1)$ dice

   $$A(n+1) : 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

   Calcoliamo allora la somma $1 + \ldots + (n+1)$. Vale che

   $$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Nella prima riga abbiamo utilizzato la formula per $A(n)$. In questo modo è dimostrato che, se $A(n)$ è vera, deve valere pure $A(n+1)$.

Abbiamo dimostrato $A(1)$ e che, se $A(n)$ è vera, anche $A(n+1)$ vale. Concludiamo che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. $\square$

Vediamo ora un esempio d'applicazione dell'induzione nella combinatoria.

Esempio 2 (teorema dei due colori) *Sono date $n \geq 0$ rette distinte nel piano. Dimostrare che le regioni determinate da queste rette possono venir colorate con al massimo due colori, in modo tale che due qualsiasi regioni adiacenti siano colorate con colori diversi.*

Soluzione. Sia $A(n)$ l'affermazione che vogliamo dimostrare. Il caso base, che si verifica quando non ci sono rette, è chiaramente verificato. Basta colorare il piano con il proprio colore preferito.

Assumiamo ora che $A(n)$ sia vera: vorremo riuscire a dedurre che vale $A(n+1)$. Vi sono $n+1$ rette nel piano. Tra queste $n+1$ rette ne scegliamo una: chiamiamola d. Se in un primo tempo ci dimentichiamo di d, restano solamente le altre n rette. Grazie all'ipotesi d'induzione, le regioni formate da queste rette possono venire colorate di bianco o di nero, in modo tale che due qualsiasi regioni adiacenti non siano mai entrambe nere o entrambe bianche.

Ora introduciamo nuovamente la retta d. Evidentemente la colorazione delle regioni non è più valida. Che cosa accade però se cambiamo i colori da un solo lato della retta d, invertendo bianco e nero? Otteniamo una colorazione valida delle regioni determinate dalle $n+1$ rette.

Formalmente dobbiamo gestire due casi.

1. Due regioni adiacenti, il cui bordo comune non è contenuto nella retta d, hanno colori diversi. Infatti, non essendo tale bordo contenuto in d, sarà contenuto in una delle altre n linee. Entrambe queste regioni sono quindi state colorate diversamente già prima di introdurre la retta d. Pertanto, a seconda della parte in cui si trovano rispetto a d (siccome il loro bordo comune non è contenuto in d, entrambe le regioni giacciono dallo stesso lato di d), i colori sono rimasti invariati oppure sono stati invertiti. In entrambi i casi i colori sono diversi.

2. Se le due regioni adiacenti hanno un bordo comune contenuto in d, allora avevano lo stesso colore prima che i colori da un lato venissero invertiti. Dunque hanno colori diversi dopo l'inversione.

Riassumendo, la nostra colorazione delle regioni delimitate dalle $n+1$ rette, che nasce da quella per n rette, è valida. Il passo induttivo è così concluso, da cui la tesi desiderata. $\square$

L'ultimo esempio ci mostra che è possibile dimostrare delle asserzioni per mezzo dell'induzione anche qualora non si tratti semplicemente di formule. Inoltre, vediamo che l'argomentazione può essere piuttosto complicata: le dimostrazioni per induzione non sono necessariamente facili!

Il prossimo esempio introduce il concetto di *induzione forte*. L'idea è la seguente: vorremmo come al solito dimostrare che l'affermazione $A(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. Come nell'induzione classica mostriamo dapprima il caso base, quindi che $A(n_0)$ è vera. Nel passo induttivo procediamo tuttavia in modo lievemente diverso: al posto di utilizzare unicamente l'assunto per cui $A(n)$ è vera, dimostriamo che $A(n+1)$ è vera sotto l'ipotesi per cui $A(k)$ valga per ogni

$n_0 \leq k \leq n$. Di qui l'aggettivo "forte"; lavoriamo con ulteriori ipotesi per raggiungere la stessa conclusione. Il teorema che segue riassume l'induzione forte.

Teorema 2 (Induzione forte) *Sia $A(n)$ un'affermazione e n_0 un numero intero. Supponiamo che*

1. *Ancoraggio: $A(n_0)$ è vera,*
2. *passo induttivo: per ogni $n \geq n_0$ vale che*

$$A(k) \text{ vale per ogni } n_0 \leq k \leq n \implies A(n+1) \text{ è vera.}$$

Allora l'affermazione $A(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Esempio 3 *Ogni numero naturale $n \geq 2$ ammette una fattorizzazione in numeri primi (cioè possiamo scrivere n come il prodotto di una quantità finita di numeri primi).*

Nota: in questo esempio non viene presa in considerazione l'unicità di tale fattorizzazione.

Soluzione. Utilizziamo l'induzione forte per l'affermazione

$$A(n) : n \text{ può venir scritto come prodotto di numeri primi}, n \geq 2.$$

1. **Ancoraggio**

   Siccome 2 è un numero primo, possiamo semplicemente scrivere $2 = 2$ (il prodotto di primi desiderato contiene solamente un fattore).

2. **Passo induttivo**

   Supponiamo che per un determinato $n \geq 2$ tutti i numeri $2 \leq k \leq n$ possano venir scritti come prodotti di numeri primi: vorremo dimostrare che anche $n+1$ può venir fattorizzato. Se $n+1$ è un numero primo, abbiamo finito, perché vale $n+1 = n+1$ come nel caso base. Se $n+1$ non è un numero primo, allora $n+1$ è il prodotto di due numeri interi $a > 1$ e $b > 1$. Siccome a e b sono minori o uguali a n (altrimenti il loro prodotto supererebbe $n+1$), a e b ammettono una fattorizzazione in numeri primi per l'ipotesi. $n+1 = ab$ è dunque anche'esso un prodotto di numeri primi, che è quanto volevamo dimostrare. Così il passo induttivo è valido per ogni $n \geq 2$.

Ancoraggio e passo induttivo sono stati mostrati, di conseguenza deduciamo la tesi desiderata. □

Un'osservazione prima di giungere alla fine: vi sono ulteriori schemi di induzione al di là dell'induzione classica e di quella forte. Ad esempio, non è sempre evidente dimostre che vale $A(n) \implies A(n+1)$, mentre può venir (facilmente) accertato che $A(n) \implies A(n+2)$. Per concludere la validità di $A(n)$ per ogni n, dobbiamo allora dimostrare **due casi base** consecutivi (per esempio, $A(1)$ e $A(2)$).

Un altro esempio di schema d'induzione, il quale può venire utilizzato in connesione con le diseguaglianze, è il seguente. Supponendo di voler dimostrare $A(n)$ per ogni $n \geq 1$, allora è sufficiente mostrare che

1. vale $A(1)$,
2. $A(n) \implies A(2n)$ per ogni $n \geq 1$,
3. $A(n) \implies A(n-1)$ per ogni $n \geq 2$.

Provate da soli a convincervi del fatto che questo implica che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

L'induzione usata male

Teorema 3 *Tutti i cavalli hanno lo stesso colore.*

Dimostrazione.

- $n = 1$: evidentemente un solo cavallo ha lo stesso colore di sé stesso.
- $n > 1$: Tralasciamo momentaneamente uno dei cavalli. Per induzione, tutti gli altri cavalli hanno lo stesso colore, tuttavia non sappiamo nulla riguardo al cavallo che abbiamo tralasciato. Rimettiamolo nel gruppo e togliamo un cavallo diverso. Nuovamente, per induzione hanno tutti lo stesso colore, perciò anche il cavallo che avevamo inizialmente tralasciato ha lo stesso colore.

Concludiamo che tutti i cavalli hanno lo stesso colore. $\square$