Induktion

Aktualisiert: 1. Januar 2020
vers. 2.1.2

Eine der wichtigsten Beweistechniken in der Mathematik ist die *Induktion*. Beginnen wir mit einem Bild, das dieses Konzept veranschaulicht. Wie klettern wir auf eine Leiter? Zuerst gehen wir die erste Sprosse hoch. Dann gehen wir von jeder Sprosse zur nächsten, Schritt für Schritt. Also soweit können wir

- auf die erste Sprosse steigen,
- auf die nächste Sprosse steigen,

also erreicht man auch jede erwünschte Sprosse, egal wie hoch.

Ihr möchtet eine weitere Illustration für Induktion? Die Kinder der 90er-Jahre werden sich sicherlich an die berühmte niederländische Fernsehsendung Domino Day erinnern. Das Prinzip bestand darin, Jahr für Jahr den Weltrekord über fallende Dominosteine in der Kette zu schlagen. Enthusiasten verbrachten einen ganzen Monat damit, die Dominosteine für den D-Day auszurichten. Was sollten die Erbauer beachten, wenn sie die Dominosteine aufstellen? Zunächst einmal müssen wir sicherstellen, dass ein Domino den Fall des nächsten Dominos verursacht, wenn er fallen wird. Darüber hinaus muss es möglich sein, den ersten Domino der Kette (oft die Aufgabe eines Gaststars) zu stürzen. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, fallen alle Dominosteine!

Gehen wir weiter zu einer mathematischen Formulierung des Induktionsbegriffs. Wir geben für jede ganze Zahl $n \geq 1$ eine Hypothese $A(n)$. Das heisst, $A(n)$ ist eine mathematische Behauptung, die von n abhängt. Die folgenden Beispiele sind Behauptungen:

1. $A(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$,
2. $B(n)$: *die Zahl n ist gerade,.*
3. $C(n)$: *es existiert eine Primzahl p mit $n \leq p < 2n$.*

Eine Behauptung kann wahr oder falsch sein. Zum Beispiel ist $B(n)$ genau dann wahr, wenn eine ganze Zahl k existiert, sodass $n = 2k$ ist. Die Behauptung $A(n)$ gilt für alle $n \geq 1$ und die Behauptung $C(n)$ gilt für alle $n \geq 2$ (dies ist ein berühmtes Ergebnis der Zahlentheorie bekannt als *Bertrandsche Postulat*).

Angenommen, wir möchten zeigen, dass eine Behauptung $A(n)$ ab einem bestimmten Wert n_0 wahr ist, d.h. Für alle $n \geq n_0$. Wie gehen wir vor? Zum Beispiel könnten wir damit beginnen, zu beweisen, dass $A(n_0)$ wahr ist (ich gehe auf die erste Sprosse). In einem zweiten Schritt könnten wir den Beweis fortsetzen, indem wir zeigen, dass wenn $A(n)$ wahr ist, notwendigerweise auch

$A(n+1)$ wahr ist (von jeder Sprosse kann ich zur nächsten gehen). Daraus folgt, dass alle Behauptungen $A(n)$ für $n \geq n_0$ wahr sind (ich kann auf der Leiter so hoch klettern, wie ich will).

Dieses Schema wird als *Induktionsbeweis* bezeichnet. Im Grunde enthält ein Induktionsbeweis also zwei Schritte, die im folgenden Satz zusammengefasst werden.

Theorem 1 (klassische Induktion)**.** *Sei $A(n)$ eine Behauptung und n_0 eine ganze Zahl. Nehme an*

1. *Verankerung: $A(n_0)$ ist wahr,*
2. *Induktionsschritt: für alle $n \geq n_0$, gilt:*

$$A(n) \text{ ist wahr} \implies A(n+1) \text{ ist wahr} .$$

Dann gilt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1. *Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung. Wir schreiben zuerst auf, was unsere Behauptung in diesem Fall überhaupt ist:

$$A(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 1$ (also $n_0 = 1$). Wir wenden nun das klassische Schema an, mit dem ein Induktionsbeweis geführt wird:

1. **Verankerung**, d.h. $A(1)$ gilt:

   Die Behauptung $A(1)$ kann wie folgt geschrieben werden

   $$A(1) : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

   Wir sehen also, dass $A(1)$ wahr ist.

2. **Induktionsschritt**, d.h. $A(n) \implies A(n+1)$:

   Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist und möchten zeigen, dass unter dieser Annahme auch $A(n+1)$ wahr ist. Die Behauptung $A(n+1)$ lautet:

   $$A(n+1) : 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Wir berechnen daher die Summe $1 + \ldots + (n+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{1+2+\ldots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

In der ersten Zeile haben wir die Formel für $A(n)$ verwendet. Somit ist bewiesen, dass wenn $A(n)$ wahr ist, auch $A(n+1)$ gilt.

Wir haben $A(1)$ gezeigt und haben bewiesen, dass wenn $A(n)$ wahr ist, auch $A(n+1)$ gilt. Wir schließen daraus, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ gilt. $\square$

Betrachten wir nun ein Beispiel für die Anwendung der Induktion in der Kombinatorik.

Beispiel 2 (Satz der zwei Farben)**.** *Gegeben sind $n \geq 0$ verschiedene Geraden in der Ebene. Zeige, dass die Regionen, die durch diese n Geraden bestimmt werden, mit maximal zwei Farben eingefärbt werden können, sodass zwei Regionen, die einen gemeinsamen Rand haben, unterschiedlich gefärbt sind.*

Lösung. Sei $A(n)$ die Behauptung, die wir zeigen wollen. Der grundlegende Fall, d.h. wenn es keine Geraden gibt, ist eindeutig richtig. Färbe die Ebene einfach mit deiner Lieblingsfarbe aus.

Nehmen wir nun an, dass $A(n)$ wahr ist, und wir möchten daraus $A(n+1)$ herleiten. Gegeben sind $n+1$ Geraden in der Ebene. Wir wählen aus diesen $n+1$ Geraden eine Gerade d aus. Wenn wir für einen Moment die Gerade d vergessen, bleiben nur noch die anderen n Geraden. Durch die Induktionshypothese können die Regionen, die durch diese n Geraden bestimmt werden, schwarz und weiss gefärbt werden, so dass zwei Regionen, die einen Rand teilen, niemals beide schwarz oder beide weiss sind.

Fügen wir jetzt die Gerade d hinzu. Offensichtlich ist die Färbung von Regionen zu diesem Zeitpunkt im Allgemeinen nicht gültig. Was passiert, wenn wir die Farben auf nur einer Seite der Geraden d durch Invertieren von Schwarz und Weiß ändern? Dann erhalten wir eine gültige Farbgebung der Regionen, die durch die $n+1$ Geraden bestimmt wird.

Abbildung 1: Abbildung der Situation mit $n = 4$ Geraden, die zusammen 10 Regionen bestimmen. Die Gerade d (links) wird anfangs ignoriert und die Regionen, die durch die verbleibenden $n-1=3$ Geraden bestimmt werden, sind in zwei Farben eingefärbt. Wir fügen dann die Gerade d (zentrales Bild) hinzu und sehen, dass die Färbung nicht gültig ist. Durch Invertieren der Farben in dem Teil der Ebene unterhalb der Geraden d erhalten wir schließlich eine gültige Färbung (rechtes Bild).

In der Tat gibt es zwei Fälle zu behandeln.

1. Zwei Regionen, die einen gemeinsamen Rand haben, der nicht in der Gerade d enthalten ist, haben unterschiedliche Farben. Tatsächlich ist diese gemeinsame Grenze, die nicht in der Geraden d enthalten ist, daher in einer der anderen n Geraden enthalten. Diese

beiden Regionen wurden vor dem Hinzufügen der Gerade d unterschiedlich gefärbt. Je nachdem, auf welcher Seite der Gerade d befinden (da ihre gemeinsame Grenze nicht in d enthalten ist, liegen die beiden Regionen auf derselben Seite von d), blieben die Farben entweder unverändert oder sie wurden beide umgekehrt. In beiden Fällen unterscheiden sich die Farben.

2. Wenn beide Regionen einen gemeinsamen Rand in der Gerade d haben, hatten beide Regionen dieselbe Farbe, bevor die Farben auf einer Seite invertiert wurden. Daher haben sie nach dem Invertieren verschiedene Farben.

Zusammenfassend gilt, dass unsere Farbgebung der Regionen, die durch $n+1$ Geraden begrenzt sind, die aus den Farben für n Geraden besteht, gültig ist. Der Induktionsschritt ist somit bewiesen und die gewünschte Schlussfolgerung erreicht. □

Das folgende Beispiel führt das Konzept der *starken Induktion* ein. Die Idee ist die folgende: Wir möchten wieder zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr ist. Wie bei einer klassischen Induktion zeigen wir zunächst den grundlegenden Fall, dass $A(n_0)$ wahr ist. In einer starken Induktion gehen wir im Induktionsschritt aber leicht anders vor: Anstatt nur die Annahme zu verwenden, dass die Aussage $A(n)$ gilt, zeigen wir jetzt, dass $A(n+1)$ wahr ist unter der Voraussetzung, dass $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n$ gilt. Daher das Adjektiv 'stark'; Wir arbeiten mit weiteren Hypothesen, um die gleiche Schlussfolgerung zu zeigen. Der folgende Satz fasst die starke Induktion zusammen:

Theorem 2 (Starke Induktion)**.** *Sei $A(n)$ eine Aussage und n_0 eine ganze Zahl. Nimm an*

1. *Verankerung: $A(n_0)$ ist wahr,*
2. *Induktionsschritt: Für alle $n \geq n_0$, gilt:*

$$A(k) \text{ gilt für alle } n_0 \leq k \leq n \implies A(n+1) \text{ ist wahr .}$$

Dann gilt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiel 3. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eine Primfaktorzerlegung (das heisst, wir können n als Produkt einer endlichen Anzahl von Primzahlen schreiben).*

Bemerkung: In diesem Beispiel wird die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nicht berücksichtigt.

Lösung. Wir verwenden starke Induktion für die Behauptung

$$A(n) : n \text{ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden}, n \geq 2.$$

1. **Verankerung**:

   Da 2 eine Primzahl ist, können wir einfach $2 = 2$ schreiben (das gewünschte Primzahlprodukt enthält nur ein Element).

2. **Induktionsschritt**

   Wir nehmen an, dass für eine bestimmte ganze Zahl $n \geq 2$ alle Zahlen $2 \leq k \leq n$ als Produkte von Primzahlen zerlegt werden können, und wir möchten zeigen, dass auch $n+1$

so zerlegt werden kann. Wenn $n+1$ eine Primzahl ist, sind wir fertig, weil wir einfach $n+1 = n+1$ wie im Basisfall hätten. Wenn $n+1$ keine Primzahl ist, dann ist $n+1$ das Produkt aus zwei Zahlen $a > 1$ und $b > 1$. Da a und b kleiner oder gleich n sind (da andernfalls ihr Produkt $n+1$ übersteigen würde), haben a und b durch die Annahme der starken Induktion eine Primfaktorenzerlegung . $n+1 = ab$ ist dann aber auch ein Produkt von Primzahlen, was zu zeigen war. Daher ist der Induktionsschritt für alle $n \geq 2$ wahr.

Die Verankerung und der Induktionsschritt wurden gezeigt, und daher haben wir die gewünschte Schlussfolgerung gezogen. $\square$

Bevor wir zum Schluss kommen: Es gibt noch andere Induktionsschemata als klassische Induktion und starke Induktion. Zum Beispiel ist es manchmal nicht einfach zu zeigen, dass $A(n) \implies A(n+1)$ gilt, während (leicht) festgestellt werden kann, dass $A(n) \implies A(n+2)$ gilt. Um die Gültigkeit von $A(n)$ für alle n abzuschließen, müssen wir **zwei grundlegende Fälle** fortlaufend anzeigen (z.Bsp. $A(1)$ und $A(2)$).

Ein anderes Beispiel eines Induktionsschemas, das im Zusammenhang mit Ungleichungen verwendet werden kann, ist das folgende. Angenommen, wir möchten $A(n)$ für alle $n \geq 1$ beweisen, dann reicht es zu zeigen

1. $A(1)$ gilt,
2. $A(n) \implies A(2n)$ für alle $n \geq 1$,
3. $A(n) \implies A(n-1)$ für alle $n \geq 2$.

Ihr müsst euch selbst davon überzeugen, dass dieses Schema $A(n)$ für alle $n \geq 1$ impliziert.

Induction Nonsense

Satz 3. *Alle horses are the same colour.*

Beweis.

- $n = 1$: of course one horse is the same colour.
- $n > 1$: Put on of the horses aside. By induction all of the other horses are the same colour, but we don't know about the horse we put aside. Put it back in and remove another horse. Again by induction they are all the same colour, therefore also the first horse we put aside is the same colour. We conclude that all horses are the same colour.

$\square$