Induction

Actualisé: 8 novembre 2018

vers. 2.0.2

Une des techniques de preuve les plus importantes en mathématiques est l'*induction*. Commençons par une image qui illustre ce concept. Comment grimpe-t-on à une échelle ? Tout d'abord on monte sur le premier échelon. Puis, de chaque échelon on passe au suivant, un échelon après l'autre. Donc, pour autant qu'on soit capable de

- monter sur le premier échelon,
- passer d'un échelon au suivant,

alors on sera capable de monter aussi haut que l'on le souhaite sur l'échelle.

Vous désirez une autre illustration pour la route ? Les 90's kids se souviennent sûrement de la fameuse retransmission télévisée néerlandaise Domino Day. Le principe était, année après année, de battre le record du monde de tombé de dominos à la chaine. Des passionnés passaient des mois entiers à aligner des dominos pour le jour J. A quoi les constructeurs devaient-ils faire attention lorsqu'ils alignaient les dominos ? Eh bien, tout d'abord, il faut s'assurer que lorsqu'un domino va tomber, il va entrainer dans sa chute la chute du suivant. De plus, il faut prévoir un moyen d'amorcer la chute du tout premier domino de la chaine (souvent le travail d'une guest star). Si ces deux conditions sont satisfaites, alors tous les dominos tomberont !

Passons à une formulation mathématique du concept d'induction. On se donne pour chaque entier $n \geq 1$ un énoncé $A(n)$. C'est-à-dire, $A(n)$ est une assertion mathématique qui dépend de n. Les exemples suivants sont des assertions :

1. $A(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$,
2. $B(n)$: *le nombre n est pair,*
3. $C(n)$: *il existe au moins un nombre premier p avec $n \leq p < 2n$.*

Une assertion peut être vraie ou fausse. Par exemple, $B(n)$ est vraie si et seulement si il existe un entier k tel que $n = 2k$. L'assertion $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ et l'assertion $C(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$ (c'est un fameux résultat de théorie des nombres connu sous le nom de *Postulat de Bertrand*).

Supposons que l'on désire démontrer qu'une assertion $A(n)$ est vraie à partir d'une certaine valeur n_0, i.e. pour tout $n \geq n_0$. Comment procéder ? Par exemple, on pourrait commencer par prouver que $A(n_0)$ est vraie (je monte sur le premier échelon). Dans un deuxième temps, on pourrait continuer la preuve en montrant que si $A(n)$ est vraie, alors nécessairement $A(n+1)$ est vraie aussi (de chaque échelon je peux passer au suivant). Alors, il s'ensuivra que toutes les assertions $A(n)$ pour $n \geq n_0$ sont vraies (je peux monter aussi haut que je veux sur l'échelle).

Ce schéma est appelé *une preuve par induction*. Synthétiquement, une preuve par induction contient deux étapes que l'on récapitule dans le théorème suivant.

Théorème 0.1 (Induction classique)**.** *Soit $A(n)$ une assertion et n_0 un nombre entier. Supposons que*

1. *cas de base : $A(n_0)$ est vraie,*
2. *pas d'induction*[a] *: pour tout $n \geq n_0$, on a :*

$$A(n) \text{ est vraie } \Rightarrow A(n+1) \text{ est vraie.}$$

Alors l'assertion $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

[a] ou en anglais *induction step*, autrement dit, ici, pas est employé dans le sens de pas et pas de pas.

Considérons sans plus tarder quelques exemples.

Exemple 1. *Montrer que pour tous les nombres naturels $n \geq 1$ on a*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution. Dans ce cas, l'assertion est la suivante

$$A(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

On veut montrer que $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ (c'est-à-dire $n_0 = 1$). Procédons par induction.

1. **cas de base**, i.e. $A(1)$ est vraie :

   L'assertion $A(1)$ s'écrit comme

   $$A(1) : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

   On constate donc que $A(1)$ est vraie.

2. **pas d'induction**, i.e. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

   On suppose que $A(n)$ est vraie et désire montrer que, sous cette hypothèse, $A(n+1)$ est également vraie. Rappelons-nous que l'assertion $A(n+1)$ s'énonce :

   $$A(n+1) : 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

   Calculons donc la somme $1 + \ldots + (n+1)$. On a

   $$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dans la première ligne nous avons utilisé la formule que fournit $A(n)$. On a donc bien démontré que si $A(n)$ est vraie, alors $A(n+1)$ aussi.

En conclusion, on a démontré $A(1)$ et on a démontré que si $A(n)$ est vraie, alors $A(n+1)$ aussi. On conclut donc bel et bien que $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. □

Voyons à présent un exemple d'application de l'induction en combinatoire.

Exemple 2 (Théorème des deux couleurs)**.** *On se donne $n \geq 0$ droites distinctes dans le plan. Montrer que l'on peut colorer les régions déterminées par ces n droites à l'aide d'au plus deux couleurs de telle manière que deux régions qui partagent une frontière sont de couleurs différentes.*

Solution. Soit $A(n)$ l'assertion que l'on désire démontrer. Le cas de base, i.e. lorsqu'il n'y a pas de droite, est clairement vrai. Il suffit en effet de colorier le plan avec votre couleur préférée.

Supposons à présent que $A(n)$ soit vraie et qu'on désire en déduire $A(n+1)$. On se donne donc $n+1$ droite dans le plan. Choisissons une droite d parmi ces $n+1$ droites. Si l'on oublie un instant la droite d, alors il ne reste que n droites. Par l'hypothèse d'induction, on peut colorier en blanc et en noir les régions déterminées par ces n droites de telle manière que deux régions qui partagent une frontière ne sont jamais toutes deux blanches ou noires.

Rajoutons à présent la droite d. Évidement, en général, à ce stade, le coloriage des régions n'est pas valide. Que se passe-t-il si l'on changeait le coloriage d'un côté de la droite d en inversant le noir et le blanc ? Alors, on obtient un coloriage valide des régions déterminées par les $n+1$ droites !

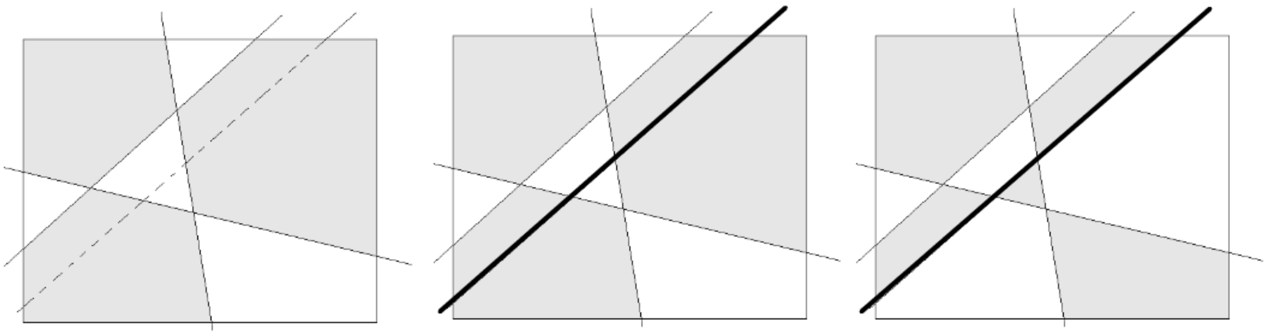

Figure 1 : Illustration de la situation avec $n = 4$ droites qui déterminent dix régions du plan. La droite d (en traitillé à gauche) est dans un premier temps laissée de côté et les régions déterminées par les $n-1 = 3$ droites restantes sont coloriées en deux couleurs. On rajoute ensuite la droite d (image centrale) et on constate que le coloriage n'est pas valide. Finalement, en inversant les couleurs dans la portion du plan en-dessous de la droite d, on obtient un coloriage valide (image de droite).

En effet, il y a deux cas à traiter.

1. Deux régions qui partagent une frontière qui n'est pas contenue dans la droite d sont de couleurs différentes. En effet, cette frontière commune, qui n'est pas contenue dans la

droite d, est donc contenue dans l'une des n autres droites. Ces deux régions ont donc été coloriées de manière différente avant que l'on rajoute la droite d. Selon si elles se situent d'un côté ou de l'autre de la droite d (comme leur frontière commune n'est pas contenue dans la droite d, les deux régions sont du même côté de d), alors, soit les couleurs sont restées inchangées, soit elles ont été inversées. Dans les deux cas, les couleurs sont différentes.

2. Si les deux régions ont une frontière commune contenue dans la droite d, alors les deux régions étaient de la même couleur avant que l'on inverse les couleurs. Elles sont donc à présent de couleurs différentes.

En conclusion, notre coloriage des régions délimitées par $n+1$ droites, construit à partir du coloriage pour n droites, est valide. Le pas d'induction est donc démontré et la conclusion désirée est établie. □

L'exemple suivant introduit le concept *d'induction forte*. L'idée est la suivante. On désire montrer qu'une assertion $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. Comme dans une induction classique, on commence par montrer le cas de base : $A(n_0)$ est vraie. Dans une induction forte, au lieu de montrer que $A(n+1)$ est vraie sous l'hypothèse que $A(n)$ est vraie, le pas d'induction consiste à montrer que $A(n+1)$ est vraie en supposant que $A(k)$ est vraie pour tout $n_0 \leq k \leq n$ (et non pas seulement $A(n)$). D'où l'adjectif "fort" ; on travaille avec plus d'hypothèses pour démontrer la même conclusion. Le théorème suivant résume l'induction forte.

Théorème 0.2 (Induction forte)**.** *Soit $A(n)$ une assertion et n_0 un nombre entier. Supposons que*

1. *cas de base : $A(n_0)$ est vraie,*
2. *pas d'induction : pour tout $n \geq n_0$, on a :*

$$A(k) \text{ est vraie pour tout } n_0 \leq k \leq n \Rightarrow A(n+1) \text{ est vraie .}$$

Alors l'assertion $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 3. *Chaque nombre naturel $n \geq 2$ possède une décomposition en facteurs premiers (autrement dit, on peut écrire n comme le produit d'un nombre fini de nombres premiers).*

Note : on ne s'intéresse pas l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans cet exemple.

Solution. Nous utilisons l'induction forte sur l'assertion

$$A(n) : n \text{ peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers}, n \geq 2.$$

1. **cas de base** :

   Comme 2 est un nombre premier, on peut simplement écrire $2 = 2$ (le produit de nombres premiers recherché ne contient qu'un élément).

2. **pas d'induction**

   On suppose que pour un certain entier $n \geq 2$, tous les nombres $2 \leq k \leq n$ possèdent une décomposition en produits de nombres premiers et on veut montrer que $n+1$ peut également s'écrire d'une telle manière. Si $n+1$ est un nombre premier, alors on a terminé, car on aurait simplement $n+1 = n+1$ comme dans le cas de base. Si $n+1$ n'est pas premier, alors $n+1$ est le produit de deux nombres $a > 1$ et $b > 1$. Puisque a et b sont inférieurs ou égaux à n (car sinon leur produit excéderait $n+1$), a et b ont une décomposition en facteurs premiers par l'hypothèse d'induction forte. Mais alors $n+1 = ab$ est également un produit de nombres premiers ce qui contredit notre supposition. Par conséquent, le pas d'induction est vrai pour tout $n \geq 2$.

Le cas de base et le pas d'induction sont vérifiés et donc nous avons établi la conclusion désirée. $\square$

Notons avant de conclure, qu'il existe d'autres schémas d'induction que l'induction classique et l'induction forte. Par exemple, parfois il n'est pas facile de montrer que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, alors qu'on peut (facilement) établir que $A(n) \Rightarrow A(n+2)$. Pour conclure, la validité de $A(n)$ pour tout n, il faut alors montrer **deux cas de bases** consécutifs (eg. $A(1)$ et $A(2)$).

Un autre exemple de schéma d'induction que l'on utilisera dans le contexte des inégalités est le suivant. Supposons que l'on veuille établir $A(n)$ pour tout $n \geq 1$, alors il est suffisant de montrer que

1. $A(1)$ est vraie,
2. $A(n) \Rightarrow A(2n)$ pour tout $n \geq 1$,
3. $A(n) \Rightarrow A(n-1)$ pour tout $n \geq 2$.

A vous de vous convaincre que ce schéma implique que $A(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.