Exercices d'Induction

Actualisé: 8 novembre 2018
vers. 2.0.1

1 Exercices

Mise en jambes

1.1 Montrer que $n^2 + n$ est pair pour tout nombre naturel n.

1.2 Soit $n \geq 3$. Montrer que la somme des angles d'un n-gone vaut $(n-2) \cdot 180°$.

1.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

(b) $$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

(c) $$1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(d) $$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$$

(e) $$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

1.4 Trouver tous les nombres naturels n tels que $3^n > n!$.

1.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

1.6 Montrer que $7^{2n} - 2^n$ est divisible par 47 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avancé

1.7 Montrer que chaque nombre naturel peut être représenté comme une somme de puissances de deux toutes avec des exposants différents.

1.8 Démontrer que les nombres $1007, 10017, 100117, 1001117, \ldots$ sont tous divisibles par 53.

1.9 Soient n droites qui séparent le plan euclidien en régions (ici, une région est une surface maximale connexe qui ne s'intersecte avec aucune droite). Montrer qu'on a au plus $\frac{n^2+n+2}{2}$ régions.

1.10 (Tour Préliminaire 2016, problème 2) Quirin a n blocs de hauteur 1 à n et aimerait les placer en ligne, de sorte que son chat puisse les traverser de droite à gauche. Son chat ne peux malheureusement que se déplacer d'un bloc à l'autre si le bloc d'arrivée est plus haut de 1 ou moins haut que le bloc d'où il vient. Le chat commence au bloc le plus à gauche. Combien de façon a Quirin d'agencer les blocs ?

Remarque : pour $n = 5$, $3-4-5-1-2$ *est une possibilité mais pas* $1-3-4-5-2$.

1.11 Soient n points du plan qui sont colorés, soit en bleu, soit en rouge. On relie chaque point rouge à chaque point bleu par une arrête. Montrer qu'on ne peut avoir plus de $\frac{n^2+n-2}{4}$ arrêtes.

1.12 Combien $\{1, 2, \dots, n\}$ possède-t-il de sous-ensembles qui ne contiennent pas deux éléments consécutifs ?

1.13 Soient $n \geq 2$ personnes assises en ligne dans un restaurant. Il y a 3 menus à choix. Personne ne souhaite avoir le même menu qu'un de ses voisins. De combien de façons différentes peut-on commander les plats si l'on veut satisfaire tout le monde ?

1.14 Soient n livres et 3 plateaux numérotés de 1 à 3. Au début de notre jeu, chaque livre est placé sur le plateau numéro 1, par ordre décroissant de taille de bas en haut. Nous pouvons à chaque coup déplacer un livre sur un autre plateau ou sur une autre pile de livre, à condition de ne jamais avoir un livre posé sur un livre plus petit que lui. De combien de coups avons-nous besoin au minimum, si l'on veut faire passer tous les livres du plateau 1 au plateau 3 ?

Olympiade

1.15 Soit $n \geq 6$. Montrer que l'on peut découper un carré en n carrés plus petits.

1.16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons un échiquier $2^n \times 2^n$, dont nous aurions retiré une case. Montrer qu'il est possible de le paver avec des L-triominos.

1.17 Sur une piste circulaire se trouvent n voitures identiques (librement réparties sur la piste). Ensemble, elles ont juste la quantité d'essence qu'il faudrait à une voiture pour faire un tour complet. On choisit une voiture. Celle-ci démarre, tandis que toutes les autres restent au repos. Lorsqu'elle dépasse une voiture à l'arrêt, la voiture en mouvement lui vole son essence. Montrer que l'on peut choisir cette voiture de sorte qu'elle puisse faire un tour complet.

1.18 Soient n bonbons dans une bonbonnière. Alice et Bob jouent au jeu suivant : tour à tour, chacun choisit de manger un nombre non-nul de bonbon inférieur ou égal à la moitié de ce que contient encore la bonbonnière. Alice commence. Perd celui qui ne laisse qu'un seul bonbon dans la bonbonnière à la fin de son tour. Pour quel n est-ce que Bob a une stratégie gagnante ?