Arrangements et principe extrémal

Actualisé: 1er janvier 2019
vers. 1.1.1

1. Dans une région se trouvent n maisons et n fontaines (aucun 3 objet colinéaires). Chaque maison doit être reliée à une fontaine avec une conduite d'eau en ligne droite de telle manière qu'il n'y ait pas deux maisons qui soient reliées à la même fontaine. Montrer qu'il existe une configuration où aucune des conduites ne se croisent.
2. À chaque point à coordonnées entières du plan on associe un nombre naturel de manière à ce que le nombre en chaque point soit la moyenne arithmétique des nombres des quatre points voisins. Montrer que tous les nombres sont égaux.
3. Dans le plan il y a $2n+2$ points de manière à ce qu'il n'y en ait pas trois sur une droite. Montrer que deux parmi ces points sont sur une droite qui partage le reste des points en deux groupes à n points.
4. Un dé ne peut pas être partagé en des dés plus petits de tailles deux à deux différentes.
5. Soient n points dans le plan. Chaque triangle dont tous les sommets se trouvent parmi ces n points a une aire ≤ 1. Montrer qu'on peut trouver un triangle d'aire ≤ 4 qui contient tous les points.
6. Soient 10 nombres dans l'intervalle ouvert $]1, 55[$. Montrer que trois parmi ces nombres sont les longueurs des côtés d'un triangle.
7. 160 cadeaux ont été distribués à 33 personnes. Montrer que au moins 4 parmi ces gens ont reçu le même nombre de cadeaux.
8. Soient $n > 2$ droites dans le plan dont aucune parallèle à une autre. Par chaque point d'intersection de deux droites il passe au moins une autre droite. Montrer que toutes les droites passent par un seul point.
9. Dans un tournoi chaque participant joue exactement une fois contre tous les autres. Il n'y a pas de match nul. Après le tournoi chaque joueur fait une liste de tous les participants qu'il a battu et de tous les participants qui ont perdu contre un joueur qu'il a battu. Montrer qu'il y a au moins un participant qui a les noms de tous les joueurs sur sa liste.
10. (Silvestre) Si $n > 2$ points dans le plan ne sont pas tous sur une seule droite, alors il y existe une droite qui passe par exactement deux de ces points.
11. Soit M un ensemble de points dans le plan ($|M| \geq 2$). Pour deux points de M le milieu du segment qui les relie est de nouveau dans M. Montrer que M contient une infinité de points.

12. $2n+1$ nombres réels ont la propriété que la somme de n parmi eux est toujours plus petite que la somme des autres $n+1$. Montrer que ces nombres sont tous positifs.

13. Parmi $2n+3$ points dans le plan il n'y a pas trois qui sont colinéaires et pas quatre qui se trouvent sur un même cercle. Montrer qu'il existe un cercle passant par trois points tel qu'exactement n autres points se trouvent à l'intérieur.

14. Soit un pays avec n villes. Chaque paire de villes est reliée par une route à sens unique. Montrer qu'il existe une ville à partir de laquelle peut atteindre n'importe quelle autre ville soit directement, soit en passant par tout au plus une autre ville.

15. Parmi $4n$ points dans le plan, il n'y a pas trois qui sont colinéaires. Montrer qu'on peut trouver n quadrilatères (pas forcément convexes) ayant ces points comme sommets qui sont tous disjoints.

16. Tout polygone convexe d'aire 1 est contenu dans un rectangle d'aire 2.

17. Prenons 69 entiers distincts tous ≤ 100. Montrer qu'il est possible d'en choisir quatre nombres a, b, c, d tels que $a+b+c=d$. Cela reste-t-il vrai pour 68 nombres?

18. Dans n'importe quel n-gone convexe il existe trois sommets consécutifs A, B, C tels que le cercle circonscrit du triangle ABC contient le n-gone tout entier.

19. Un nombre fini de polygones a la propriété que deux d'entre eux ont toujours un point commun. Montrer qu'il existe une droite qui passe par tous les polygones.

20. Six cercles différents passent par un point commun. Montrer que le centre d'un des cercles se trouve à l'intérieur d'un autre.

21. (OIM 03) Soit A un sous-ensemble à 101 éléments de $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Montrer qu'il existe des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ dans S tels que les ensembles

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

sont deux à deux disjoints.

22. On prend n points dans le plan. Montrer qu'on peut en choisir trois tels que le cercle passant par eux ne contient aucun autre point à l'intérieur.

23. (OIM 71) Il est clair que n tours dominent un échiquier $n \times n$. Mais combien de tours faut il au minimum pour dominer un échiquier tridimensionnel $n \times n \times n$?

24. (Hongrie 73) $n \geq 5$ plans quelconques divisent l'espace en plusieurs domaines. Montrer qu'au moins $(2n-3)/4$ de ces domaines sont des tétraèdres.