Le calcul double

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

1. Prouver les identités suivantes par la combinatoire
   (a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,
   (b) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$,
   (c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$,
   (d) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$.
2. Trouver une formule close pour l'expression
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2.$$
3. (CH 99) Montrer que l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 33\}$ ne peut pas être partagé en 11 sous-ensembles distincts à trois éléments, tels que dans chacun des sous-ensembles, un élément soit égal à la somme des deux autres.
4. Existe-t-il un polyèdre avec un nombre impair de faces, tel que chaque face ait un nombre impair d'arêtes ?
5. (OMI 77) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite d'entiers, telle que la somme de 7 éléments consécutifs est toujours positive, tandis que la somme de 11 éléments consécutifs est toujours négative. Quelle est la valeur maximale possible de n ?
6. Un damier 6×6 est recouvert de façon arbitraire de 18 dominos. Montrer qu'il existe une droite partageant le damier en deux parties sans couper de dominos.
7. (CH 02) Soient 24 points dans l'espace. Chaque triple de points engendre un plan et on sait que ces 24 points engendrent exactement 2002 plans distincts. Montrer qu'un des plans contient au moins 6 de ces points.
8. Soient données $2n$ cartes portant chacune un numéro. Chacun des nombres $1, 2, \ldots, n$ apparaît exactement sur deux cartes. On ordonne les cartes de manière à ce qu'entre les deux cartes portant le numéro k, il y ait exactement k autres cartes. Montrer que $n \equiv 0$ ou $n \equiv 1 \pmod 4$.
9. (OMI 87) Soit $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $p_n(k)$ le nombre de permutations de S avec exactement k points fixes. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

10. (CH 03) Soient $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{101} < 5050$ des nombres entiers. Montrer qu'on peut toujours en choisir quatre nombres distincts a_k, a_l, a_m, a_n tels que

$$5050 \mid (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

11. (OMI 01) Soit $n > 1$ un nombre impair et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des entiers arbitraires. Pour une permutation a de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, soit

$$S(a) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot a(k).$$

Montrer qu'il existe deux permutations a et b distinctes telles que $S(a) - S(b)$ soit divisible par $n!$.

12. (OMI 89) Soient k et n des nombres naturels. Soit dans le plan un ensemble S de n points distincts ayant les propriétés suivantes :
   (a) Trois points de S ne se trouvent jamais sur la même droite.
   (b) Pour tout point P de S, il existe au moins k points distincts de S qui sont à la même distance de P.

   Montrer que
$$k < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

13. Soit S l'ensemble de tous les n-uples $(X_1, \ldots, X_n)$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ pas forcément distincts et qui peuvent être vides. Pour $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$, soit
$$E(a) = \text{le nombre d'éléments de } X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

   Trouver une formule explicite pour la somme

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

14. (OMI 98) Lors d'un concours, il y a a participants et b juges avec $b \geq 3$ un nombre impair. Chaque juge note chaque participant par 'réussi' ou 'échoué'. Pour le nombre k, on a que deux juges font toujours tout au plus k jugements identiques. Montrer que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

15. 21 étudiants et 21 étudiants ont participé à un concours de mathématiques. Les résultats ont montré que
   (a) Chaque participant et chaque participante a résolu tout au plus 6 exercices.
   (b) Pour chaque étudiant et chaque étudiante, il y avait un exercice résolu par les deux à la fois.

   Montrer qu'un des exercices a été résolu par au moins 3 étudiants et trois étudiantes.