Kombinatorik - Lösungen

Aktualisiert: 22. Oktober 2018

vers. 1.2.0

1 Zählaufgaben

Einstieg

1.1 Wie viele positive vierstellige Zahlen gibt es, mit:

a) alles gleichen Ziffern? **9**

b) einer ungeraden Anfangsziffer? $\mathbf{5 \cdot 10^3}$

c) einer geraden Anfangsziffer? $\mathbf{4 \cdot 10^3}$

d) alles unterschiedlichen Ziffern? $\mathbf{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$

e) keinen zwei gleichen Ziffern nebeneinander? $\mathbf{9^4}$

1.2 Auf wie viele verschiedene Arten kann man 10 Personen in zwei Basketballteams je 5 Personen aufteilen? $\boldsymbol{\binom{10}{5}/2}$

1.3 Auf wieviele Arten lässt sich aus drei Rosenarten ein Blumenstrauss mit 12 Blumen zusammenstellen? $\boldsymbol{\binom{14}{12} = \binom{14}{2}}$

1.4 Wie viele verschiedene Permutationen der Buchstaben folgender Wörter gibt es?

a) VELOS **5!**

b) PAPIER $\mathbf{\frac{6!}{2!}}$

c) BANANE $\mathbf{\frac{6!}{2! \cdot 2!}}$

d) MINIMUM $\mathbf{\frac{7!}{3! \cdot 2!}}$

1.5 Vier Spieler A, B, C, D erhalten je dreizehn Karten (aus einem Spiel mit 52 Karten). Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden? $\boldsymbol{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}}$

Fortgeschritten

1.6 Eine Gesellschaft bestehend aus 12 Personen macht eine Bootsfahrt und muss sich daher auf drei Boote verteilen. Das erste Boot fasst 5, das zweite 4 und das letzte Boot 3 Personen. Auf wieviele Arten können sich die Personen auf die Boote verteilen? $\boldsymbol{\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4}}$

Wieviele Möglichkeiten bleiben übrig, wenn man annimmt, dass sich unter den 12 Personen ein Ehepaar befindet, dass nicht getrennt werden möchte? $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{3}} \cdot \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{4}} + \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} \cdot \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} + \cdot \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} \cdot \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$

1.7 Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, mit:

a) genau drei verschiedenen Ziffern? $\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{8}$

b) mindestens zwei gleichen Ziffern? $\mathbf{9} \cdot \mathbf{10^3} - \mathbf{9} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{8} \cdot \mathbf{7}$

c) zwei geraden und zwei ungeraden Ziffern? $\mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5^3} + \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5^3}$

2 Andere Aufgaben

Einstieg

2.1 Seien $k \leq n$ zwei natürliche Zahlen. Auf wie viele Arten kann man k verschiedene Bälle an n Kinder verteilen, so dass jedes Kind höchstens ein Ball bekommt? $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

2.2 2 parallele Geraden sind gegeben. Man wählt 10 Punkte auf der ersten und 11 Punkte auf der zweiten Geraden. Wie viele

a) Vierecke $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} \cdot \binom{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}$

b) Dreiecke $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{11} + \cdot \binom{\mathbf{11}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{10}$

Mit den Eckpunkten in den gewählten Punkten gibt es?

2.3 Wie viele positive ganze Zahlen kleiner als 2014 sind durch 3 oder 4 teilbar aber nicht durch 5? $\lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{3}} \rfloor + \lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{4}} \rfloor - \lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{12}} \rfloor - \lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{20}} \rfloor - \lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{15}} \rfloor + \lfloor \frac{\mathbf{2014}}{\mathbf{60}} \rfloor$

2.4 Wie viele sechsstellige Zahlen gibt es, für die folgende Bedingung erfüllt ist:
Jede nächste Ziffer ist strikt kleiner als die vorhergehende? $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{6}}$

Fortgeschritten

2.5 n Personen sitzen an einem runden Tisch. Zwei Sitzordnungen werden als gleich betrachtet, wenn jede Person die gleichen zwei Nachbarn hat. Wieviele verschiedene Sitzordnungen gibt es? $\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{2n}}$

2.6 Auf wie viele Arten kann man 8 ununterscheidbare Türme auf ein Schachbrett setzen, so dass keine zwei Türme einander bedrohen? **8!**

2.7 Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + w = 100$, wenn $x, y, z, w \geq 8$ gelten soll? $\binom{\mathbf{71}}{\mathbf{68}}$

2.8 Ein Lottotipp besteht aus einer 6-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 45\}$. Wieviele Tipps gibt es $\mathbf{\binom{45}{6}}$ und wieviele davon enthalten zwei aufeinanderfolgende Zahlen? $\mathbf{\binom{45}{6} - \binom{40}{6}}$

2.9 Eine Spinne hat eine Socke und einen Schuh für jedes ihrer acht Beine. Auf wieviele Arten kann sie diese anziehen, wenn sie bei jedem Bein zuerst die Socke anziehen muss? $\mathbf{\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdots \binom{4}{2} = \frac{16!}{2^8}}$

Olympiade

2.10 Auf wieviele Arten kann man aus einer Menge mit n Elementen zwei disjunkte Teilmengen auswählen, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommen soll? (Beachte: die leere Menge ist auch eine Teilmenge.) $\mathbf{\frac{3^n+1}{2}}$

2.11 Wie viele Teilmengen mit einer geraden Anzahl Elementen kann man aus einer Menge mit n Elementen auswählen? $\mathbf{2^{n-1}}$

2.12 In einer Sprache gibt es n Buchstaben. Eine Folge von Buchstaben ist genau dann ein Wort, wenn zwischen zwei gleichen Buchstaben nie zwei gleiche Buchstaben stehen.

a) Was ist die grösstmögliche Länge eines Wortes? $\mathbf{3n}$

b) Wieviele Wörter maximaler Länge gibt es? $\mathbf{n! \cdot 2^{n-1}}$