Combinatoire - Solutions

Actualisé: 22 octobre 2018
vers. 1.2.0

1 Dénombrement

Mise en jambes

1.1 Combien existe-t-il de nombres positifs à 4 chiffres avec :

a) tous les chiffres égaux ? $\mathbf{9}$

b) son premier chiffre impair ? $\mathbf{5 \cdot 10^3}$

c) son premier chiffre pair ? $\mathbf{4 \cdot 10^3}$

d) tous les chiffres différents ? $\mathbf{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$

e) jamais deux chiffres consécutifs égaux ? $\mathbf{9^4}$

1.2 De combien de manières peut-on répartir 10 personnes en deux équipes de basket-ball ayant chacune 5 membres ? $\boldsymbol{\binom{10}{5}/2}$

1.3 De combien de manières peut-on composer un bouquet de 12 fleurs avec trois sortes différentes de roses ? $\boldsymbol{\binom{14}{12} = \binom{14}{2}}$

1.4 Combien de mots différents peut-on former en permutant les lettres des mots suivants ?

a) vélos $\mathbf{5!}$

b) papier $\boldsymbol{\frac{6!}{2!}}$

c) banane $\boldsymbol{\frac{6!}{2!\cdot 2!}}$

d) minimum $\boldsymbol{\frac{7!}{3!\cdot 2!}}$

1.5 Quatre joueurs A, B, C, D reçoivent chacun une main de treize cartes (d'un jeu de 52 cartes). Combien y a-t-il de répartitions possibles ? $\boldsymbol{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}}$

Avancé

1.6 Une société constituée de 12 membres fait une excursion en bateau et doit pour cela se répartir sur trois bateaux. Les bateaux peuvent transporter respectivement 5, 4 et 3 personnes. De combien de manières les personnes peuvent-elles se répartir sur les bateaux ? $\boldsymbol{\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4}}$

Combien de possibilités reste-t-il, si on suppose que parmi les 12 personnes il y a un couple qui aimerait rester ensemble ? $\boldsymbol{\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} + \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{2} + \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4}}$

1.7 Combien de nombres à quatre chiffres existe-t-il avec :

a) exactement trois chiffres différents ? $\boldsymbol{\binom{4}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8}$

b) au moins deux chiffres égaux ? $\boldsymbol{9 \cdot 10^3 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$

c) deux chiffres pairs et deux chiffres impairs ? $\boldsymbol{4 \cdot 3 \cdot 5^3 + \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5^3}$

2 Autres exercices

Mise en jambes

2.1 Soient $k \leq n$ deux nombres naturels. De combien de manières peut-on distribuer k balles différentes à n enfants de telle sorte que chaque enfant ait au plus une balle ? $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$

2.2 2 droites parallèles sont données. On choisit 10 points sur la première et 11 sur la deuxième. Combien de

a) quadrilatères $\boldsymbol{\binom{10}{2} \cdot \binom{11}{2}}$

b) triangles $\boldsymbol{\binom{10}{2} \cdot 11 + \cdot \binom{11}{2} \cdot 10}$

existe-t-il avec des sommets parmi les points choisis ?

2.3 Combien de nombres entiers positifs plus petits que 2014 sont-il divisibles par 3 ou 4 mais pas par 5 ? $\boldsymbol{\lfloor \frac{2014}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2014}{4} \rfloor - \lfloor \frac{2014}{12} \rfloor - \lfloor \frac{2014}{20} \rfloor - \lfloor \frac{2014}{15} \rfloor + \lfloor \frac{2014}{60} \rfloor}$

2.4 Combien de nombres à six chiffres existe-t-il qui vérifient la condition suivante :
Chaque chiffre est strictement plus petit que le chiffre à sa gauche ? $\boldsymbol{\binom{10}{6}}$

Avancé

2.5 n personnes sont assises autour d'une table ronde. Deux placements sont considérés identiques si chaque personne a les deux mêmes voisins. Combien de placements différents existe-t-il ? $\boldsymbol{\frac{n!}{2n}}$

2.6 De combien de manières peut-on placer 8 tours indistinguables sur un échiquier de manière à ce qu'il n'y ait pas deux tours qui se menacent ? $\boldsymbol{8!}$

2.7 Combien y a-t-il de solutions entières à l'équation $x + y + z + w = 100$ si $x, y, z, w \geq 8$? $\boldsymbol{\binom{71}{68}}$

2.8 Un billet de loto consiste en un sous-ensemble à 6 éléments de $\{1, 2, \ldots, 45\}$. Combien de billets existe-t-il et parmi ceux-ci combien contiennent deux nombres consécutifs ? $\boldsymbol{\binom{45}{6} - \binom{40}{6}}$

2.9 Une araignée a une chaussette et une chaussure pour chacune de ses huit jambes. De combien de manières peut-elle les enfiler, si pour chaque jambe elle doit enfiler la chaussette avant la chaussure ? $\boldsymbol{\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdots \binom{4}{2} = \frac{16!}{2^8}}$

Olympiade

2.10 De combien de manières peut-on choisir deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à n éléments, si l'ordre n'a pas d'importance ? (Attention : l'ensemble vide est aussi un sous-ensemble.) $\boldsymbol{\frac{3^n+1}{2}}$

2.11 Combien de sous-ensembles d'un ensemble de n éléments peut-on choisir de telle sorte qu'ils aient un nombre pair d'éléments ? $\mathbf{2^{n-1}}$

2.12 Dans une langue, il y a n lettres. Une suite de lettres est un mot si et seulement si entre deux mêmes lettres il n'y a jamais deux lettres identiques.

a) Quelle est la longueur maximale d'un mot ? **3n**

b) Combien de mots de longueur maximale y a-t-il ? $\mathbf{n! \cdot 2^{n-1}}$