MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Combinatoria

Thomas Huber, Viviane Kehl

Aggiornato: 3 agosto 2021
vers. 1.0.1

Indice

1 Divide et impera 2

2 I quattro processi di scelta fondamentali 5

3 Biiezioni 8

1 Divide et impera

Un compito importante della combinatoria è il contare. Una domanda tipica in questo senso potrebbe essere:

Abbiamo cento scimmie cappuccine. Quante possibilità ci sono di formare un gruppo di 18 scimmie e, tra queste, di sceglierne una da cibare con un verme?

In questo capitolo ci occuperemo di studiare diversi metodi, i quali permettono di dare risposta a domande come questa.

Il principio più importante della combinatoria si chiama **Divide et impera**. Esso consiste nei seguenti passi.

1. Dividere il problema in diversi problemi più piccoli.
2. Risolvere i nuovi problemi.
3. Costruire la soluzione del problema originale per mezzo delle soluzioni ai problemi più piccoli appena ottenute.

Con un'attenta osservazione ci si può accorgere del fatto che la maggior parte di quanto faremo nel seguito (e non soltanto) è riconducibile a questo principio generale. Iniziamo dunque.

Regola del prodotto: Se un processo di scelta è costituito da r processi di scelta parziali, i quali sono *indipendenti* l'uno dall'altro, in modo tale che per il k-esimo processo vi siano precisamente n_k possibilità, allora il numero complessivo di scelte possibili è

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_r.$$

Utilizziamo la regola del prodotto perlopiù inconsciamente.

Esempio 1

a) *Le portate principali a disposizione sono lasagne, pizza e gnocchi, mentre i dessert sono torta della nonna e tiramisù. Quanti modi possibili ci sono di ordinare portata principale e dessert?*

b) *Quanti sono i numeri naturali che possiedono esattamente n cifre in base decimale?*

c) *Un insieme con n elementi possiede 2^n sottoinsiemi.*

d) *Il numero naturale $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, laddove i p_i sono numeri naturali distinti, possiede precisamente $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$ divisori positivi distinti.*

Soluzione.

a) Per la portata principale vi sono 3 possibilità, per il dessert 2. Complessivamente vi sono dunque 6 possibilità.

b) La prima cifra non può essere 0, altrimenti il numero non ha n cifre. Quindi vi sono 9 possibili scelte per la prima cifra. Per ogni altra cifra abbiamo 10 possibilità. Poiché possiamo scegliere le cifre in modo del tutto indipendente l'una dall'altra, per la regola del prodotto vi sono $9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 9 \cdot 10^{n-1}$ tali numeri.

c) Per ciascun elemento si può scegliere singolarmente e indipendentemente se esso appartenga o meno al sottoinsieme. Quindi vi sono 2^n possibilità di scelta. (Attenzione: l'insieme vuoto è anch'esso un sottoinsieme.)

d) Un divisore è determinato dalla scelta di esponenti b_k, con i quali i p_k appaiono nella sua fattorizzazione in numeri primi. Deve valere $0 \leq b_k \leq a_k$, di conseguenza abbiamo $a_k + 1$ possibilità di scegliere i b_k. (Attenzione: 1 è anch'esso un divisore.)

$\square$

Quando si conta, si determina sempre la grandezza di un insieme, cioè l'insieme degli oggetti che si vuole contare. Per occuparcene in modo più preciso, introduciamo dapprima alcune notazioni e definizioni:

Se A è un insieme finito, allora $|A|$ denota la *cardinalità* di A, cioè la quantità di elementi di A. L'*unione* di due insiemi A e B viene scritta $A \cup B$, e contiene tutti gli elementi che stanno in A o in B (Attenzione: nell'unione si trovano anche gli elementi che appartengono ad A e pure a B). L'*intersezione* dei due insiemi si scrive invece $A \cap B$ e contiene tutti gli elementi che giacciono sia in A sia in B. Due insiemi che non hanno elementi in comune vengono detti *disgiunti*. Denotiamo l'*insieme vuoto* con $\varnothing$ o $\{\}$.

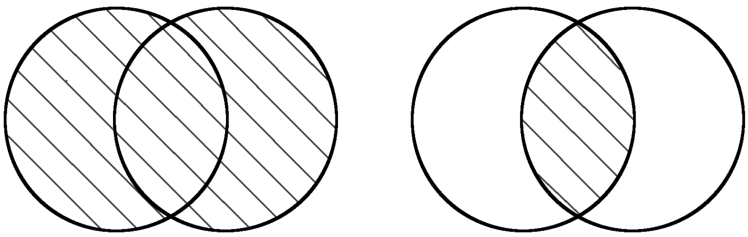


Figura 1: A sinistra $A \cup B$, a destra $A \cap B$

Per $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$ abbiamo $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ e $A \cap B = \{2, 5\}$.

Regola della somma: Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ è una partizione *disgiunta* dell'insieme A, allora vale

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

La regola della somma è una delle tante forme in cui si manifesta il divide et impera: quando non è possibile contare direttamente gli elementi di A, allora lo si divide in sottoinsiemi, le cardinalità dei quali siano più facili da determinare. Basta poi sommare i risultati.

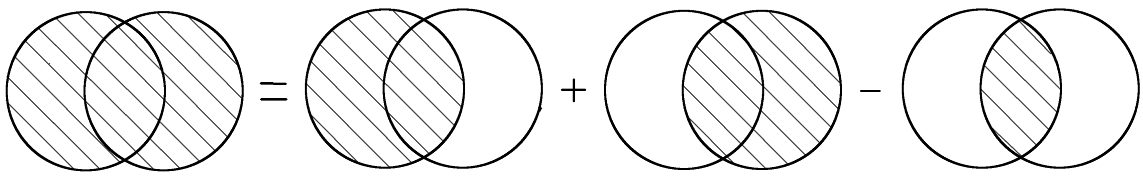
La regola della somma è qualche cosa con la quale ciascuno di noi è familiare e l'applichiamo spesso in modo inconscio. Ad esempio, l'ammontare complessivo di esseri umani sulla Terra = quantità di uomini + quantità di donne, logicamente. Vedremo in seguito interessanti applicazioni.

Ora ci occupiamo di una generalizzazione della regola della somma, tuttavia solo in due casi speciali. Il punto essenziale della regola della somma consiste nel fatto che l'insieme A viene spezzato in insiemi A_i *disgiunti*. Tuttavia, spesso le decomposizioni di cui disponiamo non sono disgiunte. In tal caso necessitiamo della formula seguente:

Principio di inclusione-esclusione: Valgono le seguenti uguaglianze:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Una breve giustificazione di queste formule: nella prima troviamo nel membro di sinistra l'ammontare di elementi contenuti in A o in B (o in entrambi). Questa quantità si ottiene anche contando gli elementi di A e quelli di B, e togliendo poi quelli che sono contenuti in entrambi gli insiemi (poiché questi sono stati contati due volte). Si consideri anche l'immagine seguente.



Nella seconda formula si ottiene l'ammontare di elementi di $A \cup B \cup C$ in modo analogo, contando dapprima tutti gli elementi di A, B e C, poi togliendo la quantità di quelli contenuti in almeno due insiemi, infine riaggiungendo la quantità di elementi appartenenti addirittura a tutti e tre gli insiemi (poiché questi ultimi sono stati aggiunti tre volte, e in seguito sottratti tre volte, e di conseguenza devono venire contati una volta di più). Disegnate un diagramma come quello sopra, per rendervi chiaro il funzionamento!

L'utilità del principio di inclusione-esclusione risiede nel fatto che è molto più semplice contare oggetti che giacciono contemporaneamente in più insiemi, rispetto a contare oggetti che risiedono in *almeno* uno di molti insiemi. Ecco un esempio tipico:

Esempio 2 *Quante possibilità ci sono di distribuire $n \geq 3$ caramelle tra tre bambini, in modo tale che nessuno dei bambini rimanga a mani vuote? (Le caramelle vengono considerate distinte fra loro.)*

Soluzione. Per la regola del prodotto vi sono 3^n modi di distribuire le caramelle, qualora non vi siano ulteriori restrizioni. Dobbiamo ora sottrarre la quantità di distribuzioni nelle quali *almeno* un bambino resta a mani vuote. Siano A, B e C gli insiemi delle distribuzioni con le quali a restare a mani vuote è il primo, il secondo e, rispettivamente, il terzo bambino. Vogliamo dunque calcolare $|A \cup B \cup C|$. Nuovamente grazie alla regola del prodotto vale $|A| = 2^n$ e per ragioni di simmetria anche $|B| = |C| = 2^n$. Inoltre vale $|A \cap B| = 1$, poiché esiste un'unica distribuzione con la quale sia il primo sia il secondo bambino restano a mani vuote: il terzo riceve tutte le caramelle. Analogamente vale $|B \cap C| = |C \cap A| = 1$. Infine abbiamo che $|A \cap B \cap C| = 0$, poiché evidentemente almeno un bambino riceve almeno una caramella. Ne consegue che

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0,$$

e la quantità di distribuzioni cercata è pertanto $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. □

2 I quattro processi di scelta fondamentali

I quattro processi di scelta fondamentali possono essere descritti come **estrazione di k palline da un'urna contenente n palline**. Più precisamente, l'urna contiene n palline distinguibili, che possiamo ad esempio immaginare numerate da 1 fino a n. Naturalmente la situazione cambia se dopo l'estrazione le palline vengono reinserite nell'urna oppure no. Inoltre si può considerare importante o meno l'ordine d'estrazione delle palline. Per la regola del prodotto ci sono allora quattro casi.

1. **Senza reimmissione, tenendo conto dell'ordine.**

   Calcoliamo il numero di modi di estrarre k palline da un'urna con n palline, senza reinserire le palline nell'urna dopo l'estrazione. L'ordine d'estrazione deve essere importante. Esempi:

   - Numero di modi di scegliere k persone tra n, e di posizionarle in fila da sinistra a destra.
   - Numero di modi di giungere al traguardo dei primi k cavalli in una corsa con n cavalli (se assumiamo che due cavalli non possano tagliare il traguardo insieme).
   - Quantità di parole di lunghezza k in un alfabeto di n lettere, nelle quali nessuna lettera compaia due volte.

   Per la prima pallina estratta vi sono n possibilità, per la seconda ancora $(n-1)$ possibilità, poiché la prima è mancante. Per la terza pallina vi sono ancora $(n-2)$ possibilità etc. Pertanto il valore cercato è uguale a

   $$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   Laddove $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ è una notazione abbreviata, e si legge n *fattoriale*. Specialmente importante è il caso $n = k$. Un riordinamento di oggetti viene anche detto *permutazione*. Vi sono dunque precisamente $n!$ permutazioni di un insieme con n elementi.

2. **Senza reimmissione, senza tenere conto dell'ordine.**

   Esempi:

   - Numero di modi di formare una squadra di k giocatori tra n persone.
   - Quantità di sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi.
   - Numero di possibili estrazioni di k numeri da $\{1, 2, \ldots, n\}$ nel Lotto.

   Si indica questo numero con $\binom{n}{k}$ (si legge "*n su k*" [1]) e lo si chiama *coefficiente binomiale*. Qual è la sua grandezza? Possiamo dapprima estrarre k palline tenendo conto dell'ordine, ottenendo dunque $n!/(n-k)!$ possibilità. Ora, vi sono precisamente $k!$ possibilità di permutare le k palline estratte. Inoltre consideriamo identiche due estrazioni, le quali si differenzino unicamente nell'ordine delle palline, pertanto abbiamo contato ciascuna estrazione $k!$ volte di troppo. Perciò abbiamo

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. **Con reimmissione, tenendo conto dell'ordine.**

   Esempi:

   - Numero di parole di lunghezza k da un alfabeto con n lettere.
   - Quantità di combinazioni di numeri di un lucchetto.

   Per ciascuna delle k palline vi sono esattamente n possibilità, poiché esse vengono reimmesse nell'urna. Con la regola del prodotto il numero cercato risulta

   $$n \cdot n \cdots n = n^k.$$

4. **Con reimmissione, senza tenere conto dell'ordine.**

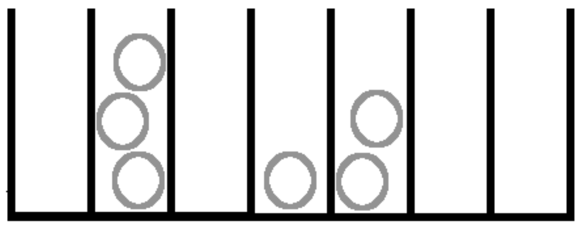
   Esempi:

   - Numero di modi di riempire un piatto di frutta con k frutti, avendo a disposizione n varietà di frutta diverse.
   - Il numero di possibili combinazioni ottenibili lanciando k dadi ($n = 6$).

   Due estrazioni sono identiche, qualora venga estratto lo stesso numero di palline recanti lo stesso numero (ricordiamo che le palline sono numerate da 1 a n). Una tale estrazione è dunque determinata univocamente indicando quante volte ciascun numero è stato estratto. Possiamo dunque distribuire le k palline tra n scatole.

   L'immagine seguente mostra una possibile estrazione per $k = 6$, $n = 7$. Qui estraiamo due volte un 2, una volta un 4 e due volte un 5.

[1] In inglese, in tedesco e in francese si dice, rispettivamente, "*n choose k*", "*n tief k*" e "*k parmi n*".



Questa figura non è però ancora pratica per il conteggio, ne disegnamo un'altra:

$$|\,\mathrm{OOO}\,||\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{OO}\,||$$

Abbiamo rappresentato le pareti delle scatole con delle barrette e le palline con dei cerchi. Possiamo trascurare la prima e l'ultima parete delle scatole, perché si situano sempre all'inizio e alla fine. Adesso ogni barretta corrisponde ad un innalzamento di 1 del numero. Vediamo nuovamente che abbiamo estratto tre volte un 2, una volta un 4 e due volte un 5; le restanti intercapedini fra le barrette non contengono palline, quindi non sono state estratte palline con numeri 1, 3, e 6.

Grazie a questa formulazione è molto comodo contare la quantità di possibili estrazioni: chiaramente si può ricostruire l'estrazione a pratire dalla sequenza di cerchi e barrette, infatti a ciascuna estrazione corrisponde un'unica tale sequenza. Per definire una di queste sequenze, è sufficiente scegliere tra $k + (n-1)$ posti quelli dove si trova una barretta (o un cerchio: il risultato è lo stesso). Vi sono $n-1$ barrette e k cerchi, di conseguenza il numero cercato è uguale a

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Questi quattro problemi principali appaiono raramente in modo puro: è solitamente la combinazione di questi e di altri metodi a portare alla soluzione. Un'osservazione: spesso per risolvere un problema si introduce (consciamente o inconsciamente) una numerazione degli oggetti, per poterli contare meglio. Alla fine è tuttavia importante dividere per il fattore appropriato, in modo da eliminare questa numerazione (a causa della quale tutto viene contato più volte). All'inizio si fanno spesso errori di questo tipo, e per evitarli ci si può solo esercitare.

Esempio 3 *Ad un torneo di tennis vi sono $2n$ partecipanti. Nel primo turno tutti i giocatori giocano precisamente una volta e tutti gli incontri sono singolari. Quanti modi vi sono di formare le n coppie di giocatori che si sfideranno?*

Soluzione. Diamo due soluzioni di questo esercizio. Sia A_n il numero cercato.

Prima soluzione

Mettiamo i $2n$ giocatori in fila: per questo vi sono $(2n)!$ possibilità. Creiamo poi le coppie $(1,2), (3,4), \ldots, (2n-1, 2n)$, cosa che può avvenire in un solo modo. Tuttavia l'unica informazione importante è chi gioca contro chi, e non chi sta dove. Ci sono 2^n modi di permutare i giocatori con i loro avversari, e $n!$ modi di permutare le coppie. Si deve quindi dividere per un fattore $2^n n!$, in modo da evitare di contare più volte.

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Seconda soluzione

Possiamo scegliere la prima coppia in $\binom{2n}{2}$ modi. Per la seconda vi sono ancora $\binom{2n-2}{2}$ possibilità e per la k-esima $\binom{2n-2(k-1)}{2}$. In questo modo abbiamo però numerato le n coppie, per cui dobbiamo ancora dividere per $n!$. Quindi

$$A_n = \frac{1}{n!}\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

□

Esempio 4 *Quanti modi vi sono di posizionare 5 libri blu e 7 libri rossi in fila su uno scaffale, se due libri blu non possono trovarsi l'uno accanto all'altro?*

Soluzione. Diamo nuovamente due soluzioni.

Prima soluzione

Anzitutto separiamo i libri blu. Ora dobbiamo porre un libro rosso in ciascuno dei quattro spazi intermedi che vengono a crearsi. Possiamo in seguito posizionare i restanti tre libri rossi in qualsiasi spazio intermedio, nonché all'inizio e alla fine. Per fare questo vi sono $\binom{8}{3} = 56$ possibilità.

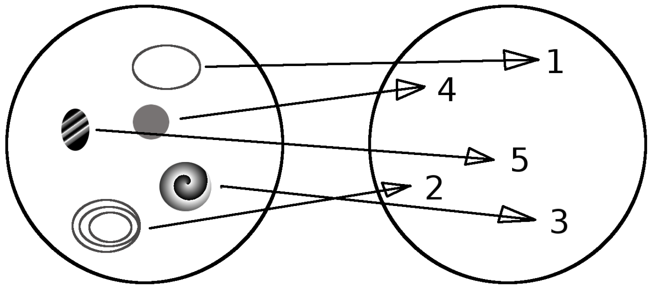
Seconda soluzione

Prima di tutto separiamo i libri rossi. Ora dobbiamo distribuire i libri blu all'inizio, nei sei spazi intermedi e alla fine. In ciascuno di questi spazi possiamo porre al massimo un libro. Poiché i libri blu non sono fra loro distinguibili, otteniamo $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/5! = \binom{8}{5}$ possibilità. □

Nel seguito tratteremo di una tecnica combinatoria molto importante, la quale trova applicazione dovunque. Essa può venir utilizzata quando non si riesce a determinare la cardinalità di un insieme per mezzo dei metodi visti finora.

3 Biiezioni

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice *biettiva*, o che è una *corrispondenza* 1:1 o *biiezione*, se ciascun elemento di B viene raggiunto esattamente una volta. Il nome proviene dal fatto che una funzione biettiva stabilisce una relazione 1:1 tra gli elementi di A e gli elementi di B, poiché ogni elemento di B possiede un'unica preimmagine.



Se esiste una funzione biettiva $f\colon A \to B$ tra A e B, allora vale automaticamente che $|A| = |B|$. Questo è spesso molto pratico. Quando abbiamo un insieme A del quale non sappiamo determinare la grandezza, possiamo tentare di stabilire una biiezione con un altro insieme, i cui elementi siano più semplici da contare.

Abbiamo fatto proprio questo per il problema dell'urna nel quarto caso. Abbiamo proiettato in modo biettivo l'insieme delle possibili estrazioni sull'insieme di tutte le sequenze di barrette e cerchi con $n-1$ barrette e k cerchi. Queste sequenze sono molto più semplici da contare rispetto alle estrazioni originali. Ora seguono alcuni ulteriori esempi.

Esempio 5 *Consideriamo un poligono convesso con n lati, nel quale tre diagonali non si intersecano mai in uno stesso punto interno (un punto che non appartiene al bordo). Determinare il numero totale di punti di intersezione tra due diagonali all'interno del poligono.*

Soluzione. Ognuno dei punti d'intersezione giace esattamente su due diagonali, poiché tre diagonali non passano mai per lo stesso punto. Consideriamo i 4 vertici del poligono dai quali partono le due diagonali. Da questi ultimi si può ricostruire il punto d'intersezione: c'è solo un modo di scegliere due diagonali che si intersecano all'interno del poligono e i cui estremi sono questi 4 vertici (è facile convincersene). Questa costruzione determina allora una biiezione tra l'insieme di tutti i punti d'intersezione interni al poligono e l'insieme dei sottoinsiemi dei vertici contenenti 4 elementi. Vi sono ora $\binom{n}{4}$ possibilità di scegliere i 4 vertici, perciò vi sono altrettanti punti di intersezione. $\square$

Esempio 6 (è necessaria la conoscenza di *Teoria dei numeri I*) *Sia $M = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Una coppia (a, b) di due numeri appartenenti a M è detta* buona*, qualora valga $n \mid a+2b$. Dimostrare che vi sono tante coppie buone (a, b) con $a > b$, quante ve ne sono con $b > a$.*

Soluzione. Si potrebbe provare a contare il numero di coppie buone con $a > b$ e $b > a$ e risolvere in questo modo l'esercizio. Tuttavia non ci è richiesto il numero esatto di coppie. Con una biiezione va tutto molto più veloce. L'osservazione centrale è questa: (a, b) è una coppia buona se e solo se $(n-a, n-b)$ lo è. Questo segue immediatamente dall'equazione $(a + 2b) + ((n-a) + 2(n-b)) = 3n$. Inoltre vale $a > b \Leftrightarrow n-a < n-b$. Ne risulta che la funzione $(a, b) \mapsto (n-a, n-b)$ è una biiezione dall'insieme delle coppie buone con $a > b$ all'insieme di quelle con $b > a$. $\square$

Esempio 7 *Quante successioni binarie di lunghezza n vi sono, le quali contengono esattamente m blocchi* 01*? (In una successione binaria compaiono unicamente 0 e 1).*

Soluzione. Il numero di scambi $0-1$ deve valere per ipotesi esattamente m. E per quanto riguarda il numero di scambi $1-0$? Evidentemente tra due scambi $0-1$ c'è sempre precisamente uno scambio $1-0$, che ve ne siano però all'inizio alla fine, ciò dipende dalla successione. È però possibile fare in modo che questo accada sempre, aggiungendo un 1 all'inizio e uno 0 alla fine della successione. La nuova successione di lunghezza $n+2$ ha dunque esattamente $m+1$ scambi $1-0$. Evidentamente questa nuova successione è univocamente determinata dalla posizione dei $2m+1$ scambi da 0 a 1 oppure da 1 a 0. Questi avvengono sempre tra due elementi successivi della successione, quindi negli $n+1$ spazi intermedi. Vi sono $\binom{n+1}{2m+1}$ possibilità di scegliere tali posizioni. Questa è altresì la soluzione dell'esercizio. (Domanda: dove si nasconde la biiezione in questa dimostrazione?) $\square$