Kombinatorik

Thomas Huber, Viviane Kehl

Aktualisiert: 12. November 2017
vers. 1.0.1

Inhaltsverzeichnis

1 Divide and Conquer

Eine wichtige Aufgabe der Kombinatorik ist das Zählen. Typische Fragestellungen in diesem Zusammenhang sind etwa:

Wir haben hundert Kapuzineraffen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Gruppe aus achtzehn Tieren zusammenzustellen und einem dieser achtzehn Affen einen Mehlwurm zu verfüttern?

Dieses Kapitel wird sich mit diversen Methoden beschäftigen, die es erlauben, Fragen wie diese zu beantworten.

Das wichtigste Prinzip in der Kombinatorik lautet **Divide and Conquer**:

1. Teile das Problem in Teilprobleme auf.
2. Löse die Teilprobleme.
3. Konstruiere aus diesen Lösungen die Lösung des ursprünglichen Problems.

Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass sich das meiste, was wir hier machen werden (und nicht nur das), diesem allgemeinen Prinzip unterordnet. Beginnen wir also.

Produktregel: Besteht ein Auswahlprozess aus r Teilprozessen, die *unabhängig* voneinander sind, sodass man im k-ten Prozess genau n_k Wahlmöglichkeiten hat, dann ist die Gesamtzahl der Wahlmöglichkeiten gleich

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

Wir verwenden die Produktregel meist unbewusst.

Beispiel 1.

a) *Als Hauptgänge stehen Lasagne, Pizza und Gnocchi zur Verfügung, als Dessert Torta della Nonna und Tiramisu. Wie viele Möglichkeiten gibt es, Hauptgang und Dessert zu bestellen?*

b) *Wieviele natürliche Zahlen gibt es, die im Dezimalsystem geschrieben genau n Stellen besitzen?*

c) *Eine n-elementige Menge besitzt 2^n Teilmengen.*

d) *Die natürliche Zahl $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$ wobei die p_i verschiedene Primzahlen sind, besitzt genau $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_r + 1)$ verschiedene positive Teiler.*

Lösung.

a) Für den Hauptgang gibt es 3 Möglichkeiten, für das Dessert 2. Insgesamt gibt es also 6 Möglichkeiten.

b) Die erste Ziffer darf keine 0 sein, sonst ist die Zahl nicht n-stellig. Also gibt es 9 Möglichkeiten, die erste Ziffer zu wählen. Für jede weitere Ziffer gibt es 10 Möglichkeiten. Da wir die Ziffern völlig unabhängig voneinander wählen dürfen, gibt es nach der Produktregel also $9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 9 \cdot 10^{n-1}$ solche Zahlen.

c) Man kann für jedes Element einzeln und unabhängig entscheiden, ob es zur Teilmenge gehört oder nicht. Also gibt es 2^n Wahlmöglichkeiten. (Beachte: die leere Menge ist auch eine Teilmenge)

d) Ein Teiler ist dadurch bestimmt, dass man die Exponenten b_k angibt, mit denen die Primzahlen p_k in seiner Primfaktorzerlegung vorkommen. Dabei ist $0 \leq b_k \leq a_k$, folglich gibt es $a_k + 1$ Möglichkeiten, b_k zu wählen. (Beachte: 1 ist auch ein Teiler)

□

Wenn man etwas zählt, dann bestimmt man immer die Grösse einer Menge, nämlich der Menge der Dinge, die man zählen möchte. Um dies genauer zu betrachten, zuerst einige nützliche Definitionen und Notationen:

Ist A eine endliche Menge, dann bezeichnet $|A|$ die *Anzahl* Elemente von A. Die *Vereinigung* von zwei Mengen A und B schreibt man als $A \cup B$, sie beinhaltet alle Elemente, die in A oder B liegen. Beachte, dass in der Vereinigung auch die Elemente sind, die in A und B liegen. Der *Schnitt* der zwei Mengen wird als $A \cap B$ geschrieben, er beinhaltet alle Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen. Zwei Mengen, die kein Element gemeinsam haben, nennt man *disjunkt*. Die *leere Menge* schreiben wir $\varnothing$ oder $\{\}$.

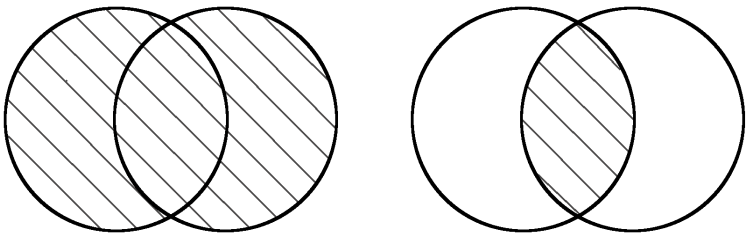


Abbildung 1: Links $A \cup B$, rechts $A \cap B$

Für $A = \{2, 4, 5\}$ und $B = \{1, 2, 5, 6\}$ gilt $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ und $A \cap B = \{2, 5\}$.

Summenregel: Ist $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ eine *disjunkte* Zerlegung der Menge A, dann gilt

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Die Summenregel ist eine der vielen Erscheinungsformen von Divide and Conquer: Wenn man die Elemente von A nicht direkt zählen kann, dann unterteilt man sie in Gruppen, deren Grösse einfacher zu bestimmen ist, und addiert die Ergebnisse. Die Summenregel ist eine Grunderfahrung jedes Menschen und wir verwenden sie unbewusst natürlich dauernd. Zum Beispiel ist die Gesamtzahl Menschen auf der Welt = Anzahl Männer + Anzahl Frauen, logisch. Wir werden später interessantere Anwendungen sehen.

Nun besprechen wir eine Verallgemeinerung der Summenregel, allerdings nur in zwei Spezialfällen. Der wesentliche Punkt der Summenregel ist, dass man eine Menge A in *disjunkte* Mengen A_i zerlegt. Oft hat man jedoch solche Zerlegungen, die nicht disjunkt sind. Dann brauchen wir folgende Formel:

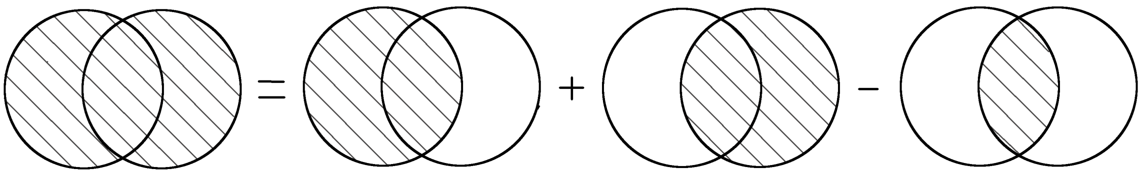
Ein-/Ausschalt-Formel: Es gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

und

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Zur Begründung dieser Formeln: in der ersten steht links die Anzahl Elemente, welche in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind. Diese Anzahl erhält man aber auch, indem man die Elemente von A und B zusammenzählt und dann diejenigen wieder abzieht, welche in beiden Mengen enthalten sind (denn diese wurden ja doppelt gezählt). Betrachte auch das folgende Bild.



In der zweiten Formel erhält man die Anzahl Elemente von $A \cup B \cup C$ analog, indem man alle Elemente zusammenzählt, dann diejenigen wieder abzieht, welche in zwei der Mengen enthalten sind, und schliesslich diejenigen wieder dazuzählt, welche sogar in allen dreien enthalten sind (denn insgesamt wurden diese Elemente dreimal gezählt, dann wieder dreimal abgezogen, folglich muss man sie wieder einmal dazunehmen). Zeichne dir selbst ein Bild wie oben, um dir dies klarzumachen!

Der Nutzen der Ein-/Ausschalt-Formel liegt nun darin, dass es oft viel einfacher ist, Dinge zu zählen, die in mehreren Mengen gleichzeitig liegen, als Dinge zu zählen, die in mindestens einer von mehreren Mengen liegen. Hier ist ein typisches Beispiel:

Beispiel 2. *Wieviele Möglichkeiten gibt es, $n \geq 3$ Bonbons auf drei Kinder zu verteilen, sodass keines der Kinder leer ausgeht (die Bonbons werden dabei als verschieden betrachtet)?*

Lösung. Es gibt nach der Produktregel 3^n Möglichkeiten, die Bonbons zu verteilen, wenn keine zusätzlichen Bedingungen bestehen. Davon müssen wir nun die Anzahl Verteilungen abziehen, in denen *mindestens* ein Kind leer ausgeht. Diese Anzahl werden wir mit der Ein-/Ausschalt-Formel berechnen. Seien A, B bzw. C die Mengen der Verteilungen, in denen das erste, das zweite bzw. das dritte Kind leer ausgeht. Wir wollen also $|A \cup B \cup C|$ berechnen. Wiederum nach der Produktregel ist $|A| = 2^n$ und aus Symmetriegründen auch $|B| = |C| = 2^n$. Ausserdem gilt $|A \cap B| = 1$, denn es gibt nur eine Verteilung, in der die ersten beiden Kinder leer ausgehen: das dritte erhält alle Bonbons. Analog gilt $|B \cap C| = |C \cap A| = 1$. Schliesslich ist $|A \cap B \cap C| = 0$, denn mindestens eines der Kinder kriegt natürlich ein Bonbon. Daraus folgt

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0,$$

und die gesuchte Anzahl Verteilungen ist somit gleich $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. $\square$

2 Die vier fundamentalen Auswahlprozesse

Die vier fundamentalen Auswahlprozesse kann man beschreiben als **Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln**. Genauer gesagt enthält die Urne n unterscheidbare Kugeln, man kann sie sich zum Beispiel von 1 bis n nummeriert vorstellen. Dabei kommt es natürlich darauf an, ob man die Kugeln nach dem Ziehen wieder in die Urne zurücklegt oder nicht. Ausserdem kann man die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, als wichtig betrachten oder nicht. Nach Produktregel betrachten wir also insgesamt vier Fälle.

1. **Ohne Zurücklegen, Reihenfolge wichtig.**
   Wir berechnen also die Anzahl Möglichkeiten, k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen, ohne die Kugeln nach der Ziehung wieder zurückzulegen. Dabei soll die Reihenfolge der gezogenen Kugeln entscheidend sein. Beispiele:

   - Anzahl Möglichkeiten, k Personen aus n Leuten auszuwählen und von links nach rechts in eine Reihe zu stellen.
   - Anzahl möglicher Einläufe der ersten k Pferde in einem Pferderennen mit n Pferden (wenn wir annehmen, dass keine zwei Pferde gleichzeitig einlaufen).
   - Anzahl Wörter der Länge k aus einem Alphabet mit n Buchstaben, in dem kein Buchstaben doppelt auftritt.

   Für die erste gezogene Kugel gibt es n Möglichkeiten, für die zweite dann noch $(n-1)$ Möglichkeiten, da die erste Kugel fehlt. Für die dritte Kugel sind es noch $(n-2)$ Möglichkeiten etc. Also ist die gesuchte Zahl gleich

   $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   Dabei ist $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ eine abgekürzte Schreibweise, man nennt sie n *Fakultät.* Wichtig ist speziell der Fall $n = k$. Eine Umordnung von Dingen nennt man auch eine *Permutation.* Es gibt also genau $n!$ Permutationen einer n-elementigen Menge.

2. **Ohne Zurücklegen, Reihenfolge egal.**
   Beispiele:

   - Anzahl Möglichkeiten, aus n Leuten ein k-köpfiges Team auszuwählen.
   - Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge.
   - Anzahl möglicher Ziehungen von k Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ im Lotto.

   Man bezeichnet diese Zahl mit $\binom{n}{k}$ (sprich: *n tief k* [1]) und nennt sie ein *Binomialkoeffizient*. Wie gross ist sie? Wir können die k Kugeln erstmal mit Beachtung der Reihenfolge ziehen, dafür gibt es $n!/(n-k)!$ Möglichkeiten. Nun gibt es aber genau $k!$ Möglichkeiten, die k gezogenen Kugeln umzuordnen. Zwei Ziehungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Kugeln unterscheiden, wollen wir ja aber als gleich betrachten, folglich haben wir jede mögliche Ziehung $k!$ mal zuviel gezählt. Dies ergibt
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. **Mit Zurücklegen, Reihenfolge wichtig.**
   Beispiel:

   - Anzahl Wörter der Länge k aus einem Alphabet mit n Buchstaben.
   - Anzahl Zahlenkombinationen bei einem Zahlenschloss.

   Es gibt für jede der k Kugeln genau n Möglichkeiten, da die Kugeln zurückgelegt werden. Mit der Produktregel ergibt sich die gesuchte Zahl zu
   $$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

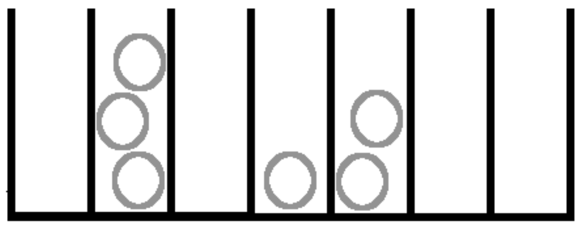
4. **Mit Zurücklegen, Reihenfolge egal.**
   Beispiel:

   - Anzahl Möglichkeiten, eine Fruchtschale mit k Früchten zusammenzustellen, wobei n verschiedene Fruchtsorten zur Verfügung stehen.
   - Würfle mit k Würfeln: Anzahl mögliche Konstellationen. (Diese sind nicht alle gleich wahrscheinlich.)

   Zwei Ziehungen sind also identisch, falls gleich viele Kugeln mit der gleichen Nummer gezogen wurden (die Kugeln sind ja von 1 bis n nummeriert). Eine solche Ziehung ist somit eindeutig dadurch bestimmt, dass wir angeben, wie oft welche Nummer gezogen wurde. Wir können also genausogut k Kugeln auf n Boxen verteilen.

   Das folgende Bild zeigt eine mögliche Ziehung für $k = 6$, $n = 7$. Hier zogen wir dreimal eine 2, einmal eine 4 und zweimal eine 5.

[1] Auf Englisch sagt man *n choose k*, also: Aus n wähle k aus.



Dieses Bild ist noch nicht praktisch zum Zählen, wir zeichnen noch ein weiteres Bild:

$$|\,\mathrm{OOO}\,||\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{OO}\,||$$

Dabei haben wir die Boxenränder als Striche gezeichnet und die Kugeln als O. Den ersten und den letzten Boxenrand lassen wir weg, weil die immer ganz am Anfang oder ganz am Ende sind. Nun entspricht also jeder Strich einer Erhöhung der Nummer um 1. Wir sehen wiederum, dass wir dreimal eine 2, einmal eine 4 und zweimal eine 5 gezogen haben, die restlichen Zwischenräume haben keine Kugeln dazwischen, also wurden keine Kugeln mit den Nummern 1, 3 und 6 gezogen.

Mit dieser Codierung lassen sich die Anzahl Möglichkeiten nun gut zählen: Offenbar kann man die Ziehung aus der Abfolge von Kugeln und Strichen rekonstruieren, es gehört nämlich zu jeder Ziehung genau eine solche Abfolge von Strichen und Kugeln. Um eine solche Abfolge festzulegen, genügt es, aus den $k+(n-1)$ Plätzen diejenigen auszuwählen, wo ein Strich (oder was auf dasselbe hinausläuft: eine Kugel) stehen soll. Es gibt $n-1$ Striche beziehungsweise k Kugeln, folglich ist die gesuchte Zahl gleich

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Diese vier Grundtypen treten natürlich selten in Reinform auf. Es ist die geschickte Kombination dieser und anderer Zählmethoden, die schliesslich zum Erfolg führen. Um ein konkretes Problem zu lösen, führt man oft bewusst oder unbewusst eine Nummerierung der Dinge ein, um sie besser zählen zu können. Es ist jedoch wichtig, am Schluss wieder durch den geeigneten Faktor zu dividieren, um ungewünschte Nummerierungen wieder zu entfernen (wegen der Nummerierung hat man alles mehrfach gezählt). Am Anfang macht man hier oft Fehler, da hilft nur Übung.

Beispiel 3. *Es treten $2n$ Tennisspieler zu einem Turnier an. In der ersten Runde spielen alle Teilnehmer genau einmal und alle Spiele sind Eins gegen Eins. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Spieler für die n Spiele der ersten Runde einzuteilen?*

Lösung. Wir geben zur Übung gleich zwei Lösungen. Sei A_n die gesuchte Zahl.

1. Lösung
Stelle die $2n$ Spieler in einer Reihe auf, dafür gibt es $(2n)!$ Möglichkeiten. Bilde dann Paare $(1,2),(3,4),\dots,(2n-1,2n)$, dies geht auf eine Art. Nun kommt es ja aber nur darauf an, wer gegen wen spielt, und nicht, wer wo steht. Es gibt 2^n Möglichkeiten, die

Spieler mit ihrem Gegner zu permutieren und $n!$ Möglichkeiten, die Paare zu permutieren. Wir müssen also noch durch $2^n n!$ teilen, um die Mehrfachzählung zu eliminieren.

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

2. Lösung
Wir können das erste Pärchen auf $\binom{2n}{2}$ Arten wählen. Für das zweite Pärchen gibt es dann noch $\binom{2n-2}{2}$ Möglichkeiten und für das k-te $\binom{2n-2(k-1)}{2}$. Jetzt haben wir aber die n Pärchen nummeriert, daher müssen wir noch durch $n!$ teilen. Also

$$A_n = \frac{1}{n!}\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

□

Beispiel 4. *Wieviele Möglichkeiten gibt es, 5 blaue Bücher und 7 rote Bücher nebeneinander in ein Regal zu stellen, wenn keine zwei blauen Bücher nebeneinanderstehen dürfen?*

Lösung. Wir geben wiederum zwei Lösungen.

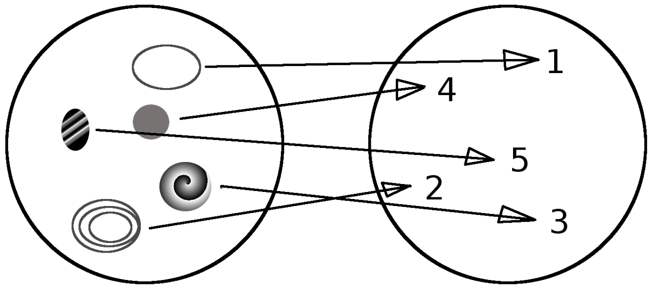
1. Lösung
Zuerst verteilen wir alle blauen Bücher. Nun müssen wir in die vier entstehenden Zwischenräume sicher jeweils ein rotes Buch stellen. Die restlichen drei roten Bücher können wir beliebig auf die Zwischenräume sowie Anfang und Ende verteilen. Dazu gibt es $\binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten.

2. Lösung
Zuerst verteilen wir alle roten Bücher. Nun müssen wir die blauen Bücher auf Anfang, die sechs Zwischenräume und Ende verteilen. Dabei dürfen wir überall maximanl ein blaues Buch hinstellen. Da die blauen Bücher nicht unterscheidbar sind, erhalten wir $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/5!$ Möglichkeiten. □

Im folgenden werden wir eine sehr wichtige kombinatorische Technik diskutieren, die überall Verwendung findet. Sie kommt dann zum Zug, wenn man die Grösse einer Menge mit den bisherigen Mitteln nicht bestimmen kann.

3 Bijektionen

Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen A und B nennt man *bijektiv* oder 1:1-*Funktion* oder *Bijektion*, falls jedes Element aus B genau einmal getroffen wird. Der Name kommt daher, dass eine bijektive Funktion eine 1:1-Beziehung zwischen den Elementen in A und den Elementen in B herstellt, denn jedes Element in B besitzt genau ein Urbild.



Existiert eine bijektive Funktion $f\colon A \to B$ zwischen den endlichen Mengen A und B, dann gilt automatisch $|A| = |B|$. Dies ist oft sehr praktisch. Wenn man eine Menge A hat, deren Grösse man nicht bestimmen kann, dann kann man versuchen, eine Bijektion in eine andere Menge zu finden, deren Elemente einfacher zu zählen sind.

Genau das haben wir oben beim Urnenproblem im 4. Fall gemacht. Wir haben die Menge der möglichen Ziehungen bijektiv abgebildet auf die Menge aller Kugel-Strich-Folgen mit k Kugeln und $n-1$ Strichen. Diese Folgen sind viel einfacher zu zählen als die ursprünglichen Ziehungen. Es folgen nun einige weitere Beispiele.

Beispiel 5. *Betrachte ein konvexes n-Eck, in dem sich keine drei Diagonalen in einem inneren Punkt (einem Punkt, der nicht zum Rand gehört) schneiden. Bestimme die Anzahl innerer Punkte des n-Ecks, welche Schnittpunkte zweier Diagonalen sind.*

Lösung. Jeder solche Schnittpunkt liegt auf genau zwei Diagonalen, da nicht drei Diagonalen durch denselben Punkt gehen. Betrachte die 4 Eckpunkte des n-Ecks, in denen die zwei Diagonalen enden. Aus diesen 4 Eckpunkten lässt sich der Schnittpunkt rekonstruieren. Denn es gibt nur genau eine Möglichkeit, zwei Diagonalen zu wählen, die sich im Innern des n-Ecks schneiden und deren Endpunkte genau diese 4 Ecken sind, wie man sich leicht überlegt. Diese Konstruktion ist daher eine Bijektion der Menge aller Inneren Diagonalenschnittpunkten auf die Menge aller 4-elementigen Teilmengen der Eckpunkte. Es gibt nun genau $\binom{n}{4}$ Möglichkeiten, 4 Eckpunkte zu wählen, also gibt es genausoviele Schnittpunkte. $\square$

Beispiel 6 (Zahlentheorie I wird benötigt)**.** *Sei $M = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Ein Paar (a, b) von zwei Zahlen aus M heisst gut, falls gilt $n \mid a + 2b$. Zeige, dass es gleichviele gute Paare (a, b) mit $a > b$ gibt, wie gute Paare mit $b > a$.*

Lösung. Man könnte versuchen, die Anzahl guter Paare mit $a > b$ und $b > a$ zu zählen und die Aufgabe so zu lösen. Aber wieso auch, die genau Zahl wird ja gar nicht verlangt. Mit einer Bijektion gehts viel schneller. Die zentrale Beobachtung dabei: (a, b) ist genau dann ein gutes Paar, wenn $(n-a, n-b)$ eines ist. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung $(a + 2b) + ((n - a) + 2(n - b)) = 3n$. Ausserdem gilt $a > b \Leftrightarrow n - a < n - b$. Daher ist die Abbildung $(a, b) \mapsto (n - a, n - b)$ eine Bijektion von der Menge der guten Paare mit $a > b$ in die Menge derjenigen mit $b > a$. $\square$

Beispiel 7. *Wieviele binäre Folgen der Länge n gibt es, die genau m 01-Blöcke enthalten? (Eine binäre Folge besteht nur aus Nullen und Einsen).*

Lösung. Die Anzahl $0-1$ Wechsel in der Folge soll nach Voraussetzung genau m sein. Wie steht es mit der Anzahl $1-0$ Wechsel? Offenbar gibt es zwischen zwei $0-1$ Wechseln immer genau ein $1-0$ Wechsel, ob es am Anfang und Ende der Folge aber solche gibt, hängt von der Folge ab. Dies können wir aber stets erzwingen, indem wir an den Anfang der Folge eine 1 und ans Ende eine 0 anhängen. Die neue Folge der Länge $n+2$ hat dann genau $m+1$ solche $1-0$ Wechsel. Offenbar ist diese neue Folge durch die Positionen der $2m+1$ Wechsel von 0 zu 1 oder von 1 zu 0 bereits eindeutig bestimmt. Diese ereignen sich stets zwischen aufeinanderliegenden Folgegliedern, also in den $n+1$ Zwischenräumen. Es gibt genau $\binom{n+1}{2m+1}$ Möglichkeiten, diese Positionen auszuwählen. Dies ist gleichzeitig die Lösung der Aufgabe. (Frage: wo steckt in dieser Argumentation jetzt die Bijektion?) $\square$