Combinatoire

Thomas Huber, Viviane Kehl

Actualisé: 12 novembre 2017
vers. 1.0.1

Table des matières

1 Divide and Conquer

Un des exercices les plus importants de la combinatoire est de compter. La formulation typique d'une question s'y rapportant ressemble à ceci :

Nous avons cent singes capucins. Combien existe-t-il de possibilités de former un groupe de dix-huit animaux et de donner à manger un ver de farine à un de ces dix-huit singes ?

Dans ce chapitre, nous parlerons de diverses méthodes qui nous permettront de répondre à ce type de questions.

Le plus important principe en combinatoire s'appelle **Divide and Conquer** :

1. Sépare le problème en sous-problèmes.
2. Résout les sous-problèmes.
3. Construit, à partir de ces solutions, la solution du problème initial.

Si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que la plupart des cas que nous traiterons dans ce chapitre (et bien plus encore) sont subordonnés à ce principe général. Commençons donc.

Principe de multiplication : Si une expérience consiste en r étapes *indépendantes* telles que dans la $k^{ième}$ étape il y a exactement n_k issues, alors le nombre total d'issues vaut

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

Nous employons le principe de multiplication la plupart du temps inconsciemment.

Exemple 1.

a) Dans un restaurant, les plats principaux consiste en des lasagnes, une pizza ou des gnocchis, tandis que l'on peut choisir comme dessert une Torta della Nonna ou du Tiramisu. Combien y a-t-il de possibilités de commander un plat principal et un dessert ?

b) Combien y a-t-il de nombres naturels composés d'exactement n chiffres dans le système décimal ?

c) Un ensemble composé de n éléments possède 2^n sous-ensembles.

d) Le nombre naturel $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts, possède exactement $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_r + 1)$ diviseurs positifs distincts.

Solution.

a) Pour le plat principal il y a 3 possibilités, et pour le dessert il y en a 2. Il y a donc en tout 6 possibilités.

b) Le premier chiffre ne peut pas être zéro, sans cela le nombre ne serait pas de longueur n. Il existe donc 9 possibilités de choisir le premier chiffre. Pour les chiffres suivants, il y a chaque fois 10 possibilités. Étant donné qu'on peut choisir les chiffres indépendamment les uns des autres, nous avons, d'après le principe de multiplication $9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 9 \cdot 10^{n-1}$ tels nombres.

c) Pour chaque élément, nous pouvons décider séparément s'il fait partie du sous-ensemble ou pas. Il y a donc 2^n choix possibles. (Attention : l'ensemble vide est également un sous-ensemble)

d) Un diviseur est déterminé par les exposants b_k correspondant au degré des nombres premiers p_k dans sa décomposition en facteurs premiers. De plus, nous avons $0 \leq b_k \leq a_k$, par conséquent il y a $a_k + 1$ possibilités de choisir b_k. (Attention : 1 est aussi un diviseur)

□

Quand on compte quelque chose, on détermine toujours la taille d'un ensemble, à savoir l'ensemble des choses que l'on aimerait compter. Pour considérer cela de manière plus précise, nous allons d'abord introduire quelques définitions et notations utiles :

Soit A un ensemble fini. Alors $|A|$ représente le *nombre* d'éléments de A. La *réunion* de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$; elle contient tous les éléments qui sont dans A ou dans B. Remarquons que dans la réunion, on trouve aussi les éléments qui sont dans A et dans B. L'*intersection* de deux ensembles est notée $A \cap B$; elle contient tous les éléments qui sont en même temps dans A et dans B. Deux ensembles qui n'ont aucun élément en commun sont appelés *disjoints*. L'*ensemble vide* est noté $\varnothing$ ou $\{\}$.

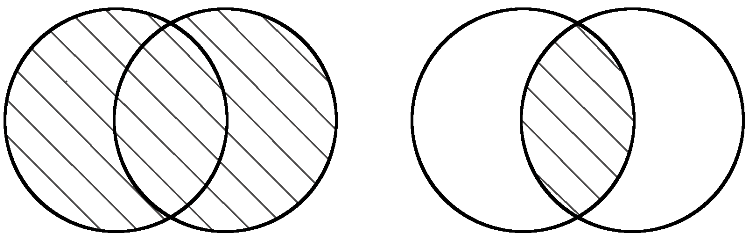


FIGURE 1 – À droite $A \cup B$, à gauche $A \cap B$

Pour $A = \{2, 4, 5\}$ et $B = \{1, 2, 5, 6\}$, on a $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ et $A \cap B = \{2, 5\}$.

Principe d'addition : Si $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est une décomposition disjointe de l'ensemble A, alors

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Le principe d'addition est une des nombreuses variantes du Divide and Conquer : si l'on ne peut pas compter les éléments de A directement, on le divise en groupes faciles à dénombrer et on additionne les résultats. Le principe d'addition fait partie des expériences de base de chacun et nous l'utilisons quotidiennement sans nous en rendre compte. Par exemple, la décomposition "nombre total des habitants de la planète = nombre d'hommes + nombre de femmes" nous paraît logique. Plus tard, nous verrons d'autres applications plus intéressantes.

On va maintenant montrer une généralisation du principe d'addition dans deux cas particuliers. Le point central du principe d'addition est qu'on divise un ensemble A en sous-ensembles *disjoints* A_i. Mais souvent on trouve des subdivisions qui ne sont pas disjointes. On utilise alors la formule suivante :

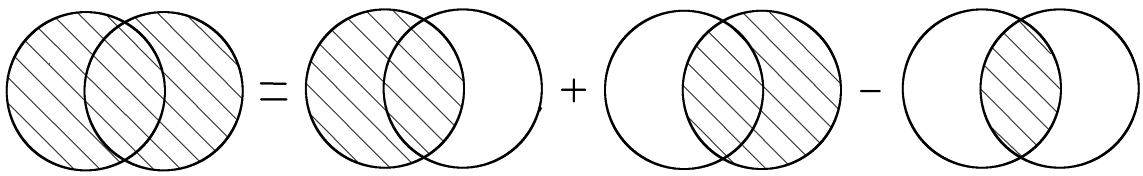
formule d'inclusion-exclusion : On a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

et

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Pour justifier ces formules : dans la première on a à gauche le nombre d'éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux). Ce nombre peut aussi être obtenu si on additionne le nombre d'éléments de A et de B et on enlève les éléments qui sont contenu dans les deux ensembles (et qui ont été comptés deux fois). On le remarque aussi sur la figure suivante.



Dans la deuxième formule on obtient le nombre d'éléments de $A \cup B \cup C$ de manière analogue en additionnant tous les éléments, enlevant ceux qui sont contenus dans deux parmi les ensembles et en rajoutant les éléments qui sont contenus dans les trois ensembles (car ils ont été comptés trois fois et enlevés trois fois donc on doit de nouveau les rajouter). N'hésite pas à faire un dessin pour clarifier tout ça !

La formule d'inclusion-exclusion est utile car souvent il est plus simple de compter des choses qui sont dans plusieurs ensembles que de compter des choses qui sont au moins dans un ensemble. Voici un exemple type :

Exemple 2. *Combien de possibilités y-a-t-il pour distribuer $n \geq 3$ bonbons à trois enfants de manière à ce que chaque enfant ait des bonbons (les bonbons sont considérés comme distincts).*

Solution. D'après le principe de multiplication il existe 3^n possibilités pour distribuer les bonbons s'il n'y a aucune contrainte. Il faut maintenant enlever le nombre de distributions où *au moins* un enfant ne reçoit pas de bonbon. On va calculer ce nombre avec la formule d'inclusion-exclusion. Soient A, B resp. C les ensembles de distributions où le premier, le deuxième resp. le troisième enfant ne reçoit pas de bonbon. On veut calculer $|A \cup B \cup C|$ En plus le principe de multiplication nous donne $|A| = 2^n$ et pour des raisons de symétrie $|B| = |C| = 2^n$. Clairement $|A \cap B| = 1$ car la seule possibilité pour ne pas laisser de bonbon pour les deux premiers enfants c'est de donner tous les bonbons au troisième. De même $|B \cap C| = |C \cap A| = 1$. Finalement $|A \cap B \cap C| = 0$ car au moins un enfant reçoit un bonbon. Donc

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0,$$

et le nombre de distributions cherché est $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

□

2 Les quatre groupements fondamentaux

Les quatre groupements fondamentaux peuvent être décrits comme **tirage de k boules d'une urne contenant n boules**. Plus exactement, l'urne contient n boules différentes, on peut par exemple les imaginer numérotées de 1 à n. Savoir si l'on remet les boules ou pas dans l'urne joue naturellement un rôle dans le calcul du nombre d'issues possibles. Tenir compte de l'ordre des boules ou y renoncer influence également le résultat. D'après le principe de multiplication nous avons donc en tout quatre cas à traiter.

1. **Tirage ordonné sans remise (Arrangement simple)**
   On calcule le nombre de possibilités de tirer k boules d'une urne qui en contient n, sans les remettre après le tirage. On tient également compte de l'ordre des boules tirées. Quelques exemples :

   - Nombre de possibilités de choisir k personnes parmi n et les mettre en rang de gauche à droite.
   - Nombre d'arrivées possibles des k premiers chevaux lors d'une course avec n chevaux sur la ligne de départ, en supposant qu'il n'y a pas de cas d'égalité à l'arrivée.
   - Nombre de mots de longueur k d'un alphabet à n lettres, dans lesquels aucune lettre n'apparaît plus d'une fois.

   Il y a n possibilités pour la première boule, puis $(n-1)$ pour la deuxième car il manque la première. Pour la troisième boule, il n'y a plus que $(n-2)$ possibilités, etc. Le nombre cherché vaut donc

   $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   où $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ est une abréviation que l'on appelle n *factorielle*. Un cas particulier des arrangements est le cas avec $n = k$. Un arrangement complet de n objets parmi n s'appelle une *permutation*. Il existe donc exactement $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

Tirage simultané sans remise (Combinaison simple)
Exemples :

- Nombre de possibilités de former une équipe ayant k membres parmi n personnes.
- Nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.
- Nombre de tirages possibles à k numéros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ au loto.

On désigne ces nombres par $\binom{n}{k}$ (prononcer n *choix* k ou n k) et on les appelle *coefficients binomiaux*. Quelle est leur grandeur ? On peut d'abord tirer les boules en tenant compte de l'ordre, pour cela il y a $n!/(n-k)!$ issues. Or il existe exactement $k!$ possibilités d'arranger les boules tirées. Deux tirages qui ne sont différenciés que par l'ordre des boules sont considérés ici comme identiques. On a par conséquent compté chaque tirage $k\,!$ fois de trop, ce qui nous donne

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. **Tirage ordonné avec remise (Arrangement avec répétition)**
Exemple :

- Nombre de mots de longueur k formés à partir d'un alphabet à n lettres.
- Nombre de combinaisons d'un cadenas à code.

Pour chaque boule, il existe exactement n possibilités, étant donné qu'elles sont remises dans l'urne. D'après le principe de multiplication, le nombre cherché vaut

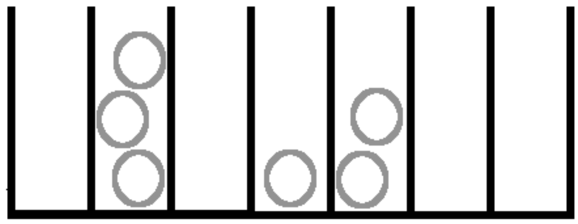
$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

3. **Tirage simultané avec remise (Combinaison avec répétition)**
Exemple :

- Nombre de possibilités de composer un plateau de fruits avec k fruits, en choisissant parmi n sortes de fruits.
- Nombre de lancers différents avec k dés indistinguables. (Ils ne sont pas tous équiprobables.)

Deux tirages sont identiques si un nombre identique de boules tirées portent le même numéro (nous avons considéré les boules numérotées de 1 à n). Un tel tirage est donc entièrement déterminé si l'on établit la fréquence de tirage de chaque numéro. On peut donc tout aussi bien répartir k boules dans n boites.

L'image suivante montre un tirage possible pour $k = 6$, $n = 7$. Ici nous avons tiré trois fois un 2, une fois un 4 et deux fois un 5.



Cette image n'est pas pratique pour compter ; nous dessinons encore une autre image :

$$|\,\mathrm{OOO}\,||\,\mathrm{O}\,|\,\mathrm{OO}\,||$$

Ici nous avons dessiné les parois des boites avec des traits et les boules avec des O. Nous ne dessinons pas la première et la dernière paroi, car elles sont dans tous les cas soit tout au début soit tout à la fin. Ainsi chaque trait correspond à une augmentation du nombre de 1. Nous voyons de nouveau que nous avons tiré le 2 trois fois, le 4 une fois et le 5 deux fois. Comme les espaces restants ne contiennent aucune boule, nous n'avons tiré aucune boule avec le numéro 1, 3 et 6.

Avec ce codage on peut désormais compter efficacement le nombre de possibilités : manifestement on peut reconstruire le tirage à partir de l'enchaînement de boules et de traits. Il y a donc pour chaque tirage exactement une telle suite de traits et de boules. Pour fixer une telle suite, il suffit de choisir les $k + (n - 1)$ places où se trouve un trait (ou ce qui revient au même : une boule). Il y a respectivement $n-1$ traits et k boules, donc le nombre recherché vaut

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bien sûr, les quatres types de base énoncés ci-haut n'apparaissent que rarement sous cette forme pure. Au bout du compte, c'est une combinaison habile de ces quatre et quelques autres méthodes de dénombrement qui mèneront au succès. Pour résoudre un problème concret, on introduit souvent (plus ou moins consciemment) une numérotation des objets pour pouvoir les compter plus facilement. Il est cependant important de diviser à la fin par le facteur approprié pour se débarrasser de cette numérotation de nouveau (à cause d'elle, on a tout compté plusieurs fois). Les débutants tombent souvent dans le piège, il n'y a que les exercices pour y remédier.

Exemple 3. *$2n$ joueurs de tennis participent à un tournoi. Au premier tour, tous les joueurs jouent exactement une fois et tous les matchs sont des simples. Combien y a-t-il de possibilités de répartir les joueurs pour les n matchs du premier tour ?*

Solution. On donne deux solutions différentes. Soit A_n le nombre cherché.

$1^{ère}$ *solution*
Formons une suite des $2n$ joueurs, pour cela il existe $2n!$ possibilités. Formons ensuite les couples $(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n-1, 2n)$, une seule manière de le faire. Toutefois, la seule chose

importante est de savoir qui joue avec qui, l'ordre est négligeable. Il y a 2^n possibilités de permuter les joueurs avec leurs adversaires et $n!$ possibilités de permuter les couples. Nous devons donc encore diviser par $2^n n!$ pour éliminer le comptage multiple.

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

2^e *solution*
Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir le premier couple, $\binom{2n-2}{2}$ pour le deuxième et $\binom{2n-2(k-1)}{2}$ pour le $k$ième. Nous avons par contre numéroté les n couples, nous devons donc diviser par $n!$. Par conséquent,

$$A_n = \frac{1}{n!}\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

□

Exemple 4. *Combien y a-t-il de possibilités de poser côte à côte 5 livres bleus et 7 livres rouges sur une étagère si deux livres bleus ne peuvent jamais se trouver côte à côte ? (On considère que deux livres de même couleur sont indistinguables)*

Solution. De nouveau nous donnons deux solutions.

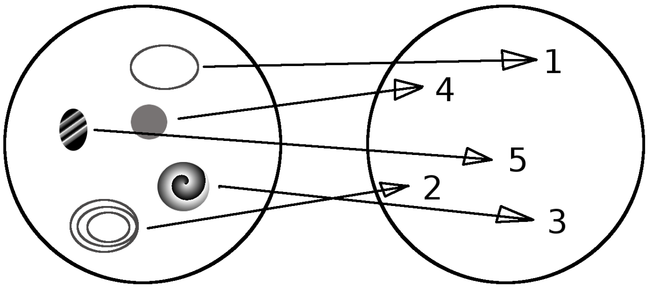
$1^{ère}$ *solution*
Tout d'abord nous plaçons tous les livres bleus. Ensuite dans les quatre espaces ainsi constitués il doit certainement se trouver un livre rouge. Les trois livres rouges restants peuvent alors être placés indifféremment dans les espaces, au début ou à la fin. Cela donne donc $\binom{8}{3} = 56$ possibilités.

2^{nde} *solution*
Nous plaçons d'abord tous les livres rouges. Ensuite nous devons placer les livres bleus parmi le début, les six espaces ainsi constitués ou la fin. Dans tous ces espaces, nous pouvons mettre au plus un livre bleu. Comme les livres bleus sont indiscernables, nous obtenons $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/5!$ possibilités. □

Nous allons maintenant aborder une technique combinatoire importante que l'on utilise partout. La plupart du temps, nous avons recours à elle quand la taille d'un ensemble ne peut pas être déterminée avec les méthodes énoncées ci-haut.

3 Bijections

Une application $f \colon A \to B$ entre deux ensembles A et$B$ est appelée *bijective* ou une *fonction 1 :1* ou encore une *bijection* si tout élément de B est atteint exactement une fois. Le nom vient du fait qu'une fonction bijective établit une relation de 1 :1 entre les éléments de A et de B, car tout élément de B a exactement une préimage.



Si il existe une bijection $f\colon A \to B$ entre les ensembles finis A et B, alors nous avons automatiquement $|A| = |B|$. C'est souvent très pratique. Si on a un ensemble A dont on ne peut pas estimer la taille, on peut essayer de trouver une bijection avec un autre ensemble dont les éléments sont plus faciles à compter.

C'est exactement ce que nous avons fait dans le quatrième cas du problème des urnes. Nous avons établi une bijection entre l'ensemble des tirages possibles et l'ensemble de toutes les suites boules-traits de k boules et $n-1$ traits. Ces suites sont beaucoup plus faciles à dénombrer que les tirages initiaux. Nous allons maintenant voir d'autres exemples.

Exemple 5. *Prenons un n-gone convexe dans lequel il n'y a pas de triple de diagonales se coupant en un même point intérieur (qui n'appartient pas au bord). Déterminer le nombre de points d'intersection de deux diagonales à l'intérieur du n-gone.*

Solution. Chaque tel point d'intersection se trouve sur exactement deux diagonales, car on a supposé que trois diagonales ne passent jamais par le même point. Considérons les 4 sommets du n-gone desquels sont issues ces deux diagonales. On peut reconstruire le point d'intersection à partir de ces sommets. Une courte réflexion nous montre qu'il y a exactement une possibilité de choisir deux diagonales se coupant à l'intérieur du n-gone et reliant exactement ces quatre sommets.Par conséquent, cette construction est une bijection entre toutes les intersections intérieures des diagonales et tous les sous-ensembles à quatre éléments de l'ensemble des sommets. Comme il y a exactement $\binom{n}{4}$ possibilités pour choisir les 4 sommets, il existe autant de points d'intersection. $\square$

Exemple 6. *Soit $M = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Un couple (a, b) de deux éléments de M s'appelle* bon *si $n \mid a + 2b$. Montrer que le nombre de bons couples (a, b) avec $a > b$ est égal au nombre de bons couples avec $b > a$.*

Solution. On pourrait essayer de compter les bons couples avec $a > b$ et ceux avec $b > a$ pour résoudre l'exercice. Cependant, comme le nombre exact n'est même pas demandé, faire une bijection est beaucoup plus rapide. L'observation décisive est la suivante : (a, b) est un bon couple si $(n-a, n-b)$ en est un. Ceci est une conséquence de l'équation $(a+2b) + ((n-a) + 2(n-b)) = 3n$. De plus, $a > b \Leftrightarrow n-a < n-b$. Ainsi, l'application $(a, b) \mapsto (n-a, n-b)$ est une bijection entre l'ensemble des bons couples avec $a > b$ et celui des bons couples avec $b > a$. $\square$

Exemple 7. *Combien y a-t-il de suites binaires de longueur n, contenant exactement m blocs de* 01 *? (Une suite binaire est constituée uniquement de zéros et de uns.)*

Solution. Le nombre d'alternances $0-1$ dans la suite vaut exactement m par hypothèse. Qu'en est-il du nombre d'alternances $1-0$? Il est clair qu'entre des alternances $0-1$, il y a exactement une alternance $1-0$, mais savoir s'il y en a au début ou à la fin, cela ne dépend que de la suite. Par contre, on peut forcer leur apparition en ajoutant un 1 au début et un 0 à la fin de la suite. La nouvelle suite de longueur $n+2$ a maintenant exactement $m+1$ alternances $1-0$. Il est évident que cette nouvelle suite est déjà entièrement déterminée par la position de ces $2m+1$ changements de 0 à 1 et de 1 à 0. Ceux-ci se produisent toujours entre deux termes consécutifs de la suite, c'est-à-dire dans les espaces intermédiaires. Il y a exactement $\binom{n+1}{2m+1}$ possibilités de choisir ces positions. C'est aussi la solution de cet exercice. (Question : où la bijection se cache-t-elle dans cette argumentation ?) $\square$