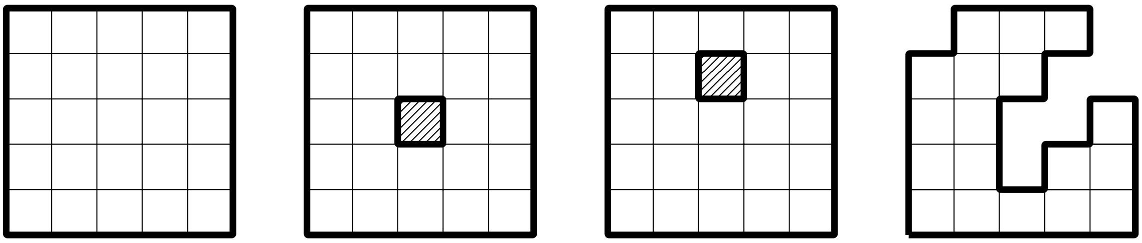
Färbungsbeweise

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Aufgaben

Einstieg

1.1 Kann man überlappungsfrei und ohne Löcher die Figuren auf den Bildern unten mit 1×2 Dominosteinen bedecken?
Bemerkung: Falls ja, zeige wie. Falls nein, dann beweise, dass es unmöglich ist.



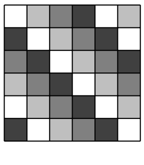
Lösung:

Bild 1: eine ungerade Anzahl Felder $\rightarrow$ unmöglich
Bild 2: möglich
Bild 3: Schachbrettfärbung $\rightarrow$ unmöglich
Bild 4: beginnt man in einer der Ecken, sieht man schnell, dass es unmöglich ist.

1.2 Wieviele Straight-Tetrominos (1×4) kann man maximal überlappungsfrei in ein 6×6 Quadrat legen?

Lösung:

Verwende die 4-Standardfärbung: Jedes Straight-Tetromino bedeckt von jeder Farbe ein Feld. Da es jedoch nur 8 dunkelgraue Felder gibt, kann man maximal 8 davon in das Quadrat legen.

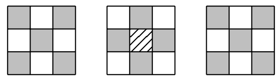


weiss: 10
hellgrau: 9
dunkelgrau: 8
schwarz: 9

1.3 Kann man aus 13 Ziegelsteinen der Grösse $1 \times 1 \times 2$ einen Würfel der Grösse $3 \times 3 \times 3$ mit einem $1 \times 1 \times 1$ grossen Loch in der Mitte bauen?

Lösung:

Verwende die 2-Standardfärbung im Dreidimensionalen. Nebenstehend sind die drei Schichten separat aufgezeichnet. Wir erkennen so, dass es 12 weisse und 14 schwarze Blöcke gibt. Da jedoch jeder Ziegelstein einen weissen und einen schwarzen Block abdeckt, ist es nicht möglich, einen solchen Würfel zu bauen.



1.4 Wir haben ein Brett der Grösse

a) 8×8.

b) 9×9.

Auf jedem Feld sitzt ein Käfer. Auf ein Signal hin krabbeln alle Käfer auf ein benachbartes Feld, d.h. auf ein Feld, das eine gemeinsame Seite mit dem alten Feld hat. Können sich die Käfer nach dem Signal so arrangieren, dass wieder auf jedem Feld genau ein Käfer sitzt?

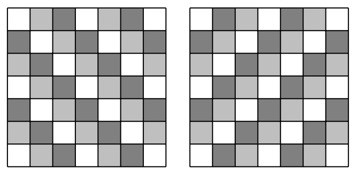
Lösung:

a) möglich
b) Färbe mit der 2-Standardfärbung (Schachbrett). Dann gibt es 41 schwarze und 40 weiss Felder. Da ein Käfer von einem weissen auf ein schwarzes Feld krabbelt oder umgekehrt, bleibt 1 schwarzes Feld frei. Es ist also nicht möglich.

1.5 Ein 7×7 Quadrat ist mit 16 Straight-Triominos (1×3) und einem einzelnen Einheitsquadrat bedeckt. Finde alle möglichen Positionen des Einheitsquadrates.

Lösung

Wir benutzen zweimal die 3-Standardfärbung. Bei beiden Färbungen gibt es 1 weisses Feld mehr als von den anderen Farben. Daher muss das Einheitsquadrat ein Feld abdecken, das in beiden Färbungen weiss ist. Man entdeckt, dass so noch 9 Positionen möglich sind. Für alle von diesen kann man auch tatsächlich eine gültige Belegung finden.



Fortgeschritten

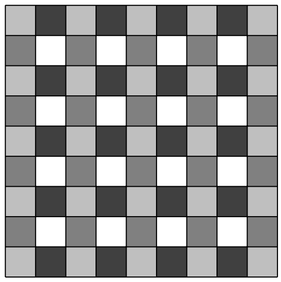
1.6 Beweise, dass man eine $90 \times 90 \times 90$ Kiste nicht mit Straight-Tetrominos ($1 \times 1 \times 4$) füllen kann.

Lösung:

Färbe mit der 4-Standardfärbung in 3D. Beginne dann, die Kiste mit Tetrominos zu füllen. Macht man dies systematisch, bleibt am Schluss ein 2×2 Block übrig, in welchem nicht jede Farbe gleich oft vorhanden ist.
Wir haben so gezeigt, dass in der Kiste nicht alle 4 Farben gleich oft vorkommen. Somit ist es unmöglich, die Kiste mit Straight-Tetrominos zu füllen.

1.7 Auf jedem Feld eines 9×9-Brettes sitzt ein Käfer. Auf ein Signal hin krabbeln alle Käfer diagonal auf ein benachbartes Feld. Danach können mehrere Käfer auf einem Feld sein. Was ist nach dem Signal die kleinstmögliche Anzahl freier Felder?

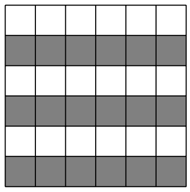
Lösung:



Wir färben gemäss Bild. Käfer krabbeln
· weiss $\Leftrightarrow$ hellgrau
· dunkelgrau $\Leftrightarrow$ schwarz
Da es nur 16 weisse Felder gibt, aber 25 hellgraue, bleiben also sicher 9 hellgraue Felder leer. Wir können eine Konstruktion finden, sodass nur 9 Felder leer bleiben, daher ist dies die kleinsstmögliche Anzahl freier Felder.

1.8 Ein $2n \times 2n$ Brett ist in 2×1 Dominos zerschnitten. Beweise, dass die Anzahl der horizontalen Dominosteine gerade ist.

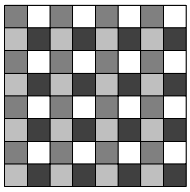
Lösung:



Wir benutzen das Streifenmuster. Da die Seitenlängen gerade sind, gibt es von beiden Farben gleich viel.
Jeder vertikale Dominostein bedeckt 1 weisses und 1 schwarzes Feld, jeder horizontale Dominostein entweder 2 weisse oder 2 schwarze Felder. Falls nun die Anzahl horizontaler Dominosteine ungerade ist, dann sind entweder mehr weisse oder mehr schwarze Felder bedeckt, was ein Widerspruch ist, da ja gleich viele weisse wie schwarze Felder vorhanden sind.

1.9 Auf einem grossen karierten Blatt Papier sind 2000 Häuschen markiert. Man beweise, dass man von diesen 500 Häuschen wählen kann, sodass es keine zwei gewählten Häuschen gibt, die eine gemeinsame Seite oder Ecke haben.

Lösung



Wir können das unendlich grosse Blatt gemäss Bild färben. Gemäss Färbung haben Häuschen von gleicher Farbe keine gemeinsame Seite oder Ecke. Da 2000 Häuschen markiert sind, gibt es eine Farbe, von der mindestens 500 markiert sind. Wir können also 500 markierte Häuschen einer Farbe wählen.

1.10 Beweise, dass ein $a \times b$ Rechteck genau dann mit $1 \times n$ Rechtecken überlappungsfrei bedeckt werden kann, wenn n ein Teiler von a oder ein Teiler von b ist.

Lösung:

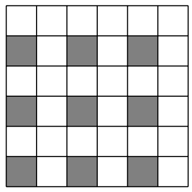
Eine präzise Lösung ist hier eher abstrakt und technisch. Die Idee dahinter sollte jedoch verständlich sein.
Hier brauchen wir eine n-Standardfärbung. Jedes $1 \times n$ Rechteck wird so genau von jeder Farbe ein Feld abdecken. Das heisst, wir müssen von allen Farben gleich viele Felder haben. Wir zeigen, dass dies ist nur der Fall ist, wenn n ein Teiler von a oder b ist:
Es ist leicht zu sehen, dass in einem Rechteck der Grösse $c \times d$ jede Farbe gleich oft vorkommt, falls c oder d durch n teilbar ist. Sei nun $a = kn + r$ und $b = ln + s$. Da wir nur herausfinden möchten, ob jede Farbe im $a \times b$ - Rechteck gleich oft vorkommt, können wir zuerst ein $k * n \times b$ und danach ein $r \times l * n$ - Rechteck entfernen und müssen uns nur noch um den Rest kümmern, da in den entfernten Rechtecken ja jede Farbe gleich oft vorkommt. Der Rest ist ein $r \times s$ - Rechteck. Wir können annehmen, dass es weniger Spalten als Reihen gibt (falls das nicht der Fall wäre, könnten wir das ganze einfach um 90° drehen). Wir betrachten die Farbe im oberen linken Feld. Diese Farbe wird in jeder Spalte genau einmal vorkommen (dies überlegt man sich wie folgt: in jeder Spalte rutscht die Farbe eine Reihe nach unten, bis es am rechten Rand ankommt). Damit

von jeder Farbe gleich viele Felder vorhanden sein können, muss also jede Farbe in jeder Zeile vorkommen. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass die Seitenlänge kürzer als n ist, da r und s der Rest ist.
Somit kommen in diesem Restfeld nicht alle Farben gleich oft vor und das ganze Rechteck ist nicht belegbar, wenn es einen solchen Rest gibt. Dies bedeutet, dass eine der Seiten durch n teilbar sein muss.

1.11 Ein rechteckiger Boden ist mit 1×4 und 2×2 Kacheln belegt. Eine Kachel geht zu Bruch, es steht jedoch eine Kachel des anderen Typs zur Verfügung. Zeige, dass der Boden nicht durch Umordnen der Kacheln geflickt werden kann.

Lösung:

Jede 2×2 Kachel bedeckt immer 1 graues Feld. Jede 1×4 Kachel bedeckt entweder kein graues Feld oder 2 graue Felder.
Gibt es also auf dem rechteckigen Boden eine ungerade Anzahl grauer Felder, so braucht es eine ungerade Anzahl der 2×2 Kacheln und man kann ihn nicht mit eines geraden Anzahl belegen.
Das gleiche Argument gilt für eine gerade Anzahl grauer Felder.



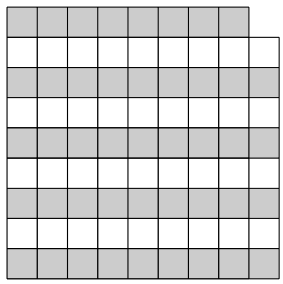
Olympiade

1.12 Ein Eckfeld eines $(2n + 1) \times (2n + 1)$-Brettes fehlt. Für welche n kann man das Brett so mit Dominosteinen bedecken, genau gleich viele Dominosteine horizontal und vertikal liegen?

Lösung:

Wir färben das Feld mit einem Streifenmuster. Ein Dominstein belegt vertikal 1 weisses Feld und 1 schwarzes Feld, horziontal entweder doppelweiss oder doppelschwarz. Wir zählen:

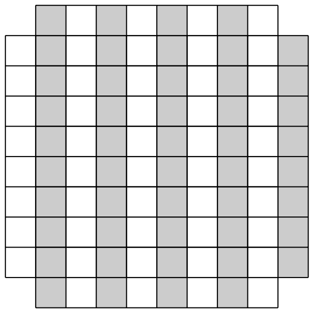
- Anzahl Felder: $4n^2 + 4n$
- Hälfte der Felder: $2n^2 + 2n$
- Anzahl schwarzer Felder: $(n + 1)(2n + 1) - 1 = 2n^2 + 3n$
- Anzahl weisser Felder: $n(2n + 1) = 2n^2 + n$



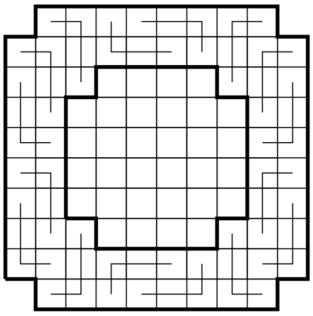
Die Differenz der farbigen Felder beträgt also $2n$. Da jeder Dominostein zwei Felder belegt, braucht es also n Steine mehr, die doppelschwarz sind. Wenn x Steine doppelweiss sind, so müssen $x + n$ Steine doppelschwarz sein. Insgesamt liegen dann $2x + n$ horizontal.
Diese bedecken $4x + 2n$ Felder. Gemäss Aufgabe soll dies gerade der Hälfte der Felder entsprechen, also $4x + 2n = 2n^2 + 2n \Leftrightarrow 4x = 2n^2$. Wir sehen aus dieser Gleichung, dass n gerade sein muss.
Man überlegt sich noch einigermassen leicht eine Konstruktion, falls n gerade ist und sieht, dass dies immer geht.

1.13 Von einem $n \times n$ Brett werden die 4 Eckfelder entfernt. Für welche Werte von n ist es möglich, diese Figur mit L-Tetrominos zu bedecken?

Lösung:



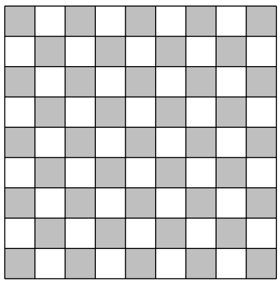
Wir sehen, dass ein solches Brett $n^2 - 4$ Felder hat. Damit dies mit Tetrominos belegbar sein kann, muss n gerade sein.
Wir können nun das Brett mit einem Streifenmuster färben. Dieses hat die Eigenschaft, dass jedes L-Tetromino entweder 1 schwarzes und 3 weisse Felder bedeckt oder umgekehrt. Ausserdem ist die Anzahl schwarzer und weisser Felder gleich gross. Somit muss es eine gerade Anzahl L-Tetrominos geben. Daher muss die gesamte Anzahl Felder durch 8 teilbar sein. Daher darf n nicht durch 4 teilbar sein.



Für alle n, die gerade aber nicht durch 4 teilbar sind, können wir das Brett belegen. Die Konstruktion können wir von aussen her beginnen. Hier ist der Fall $n = 10$ abgebildet, mit dem äussersten Ring. Wir können im Inneren die gleiche Konstruktion in den Ecken verwenden.

1.14 Die Seitenflächen eines $9 \times 9 \times 9$ Würfels sind in 1×1 Quadrate unterteilt. Der Würfel ist komplett und überlappungsfrei mit 2×1 Streifen beklebt. Die Seiten der Streifen verlaufen entlang der Seiten der kleinen Quadrate. Beweise, dass die Anzahl der geknickten Streifen ungerade ist.

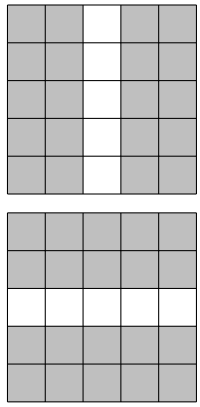
Lösung:



Wir färben jede der 6 Seiten mit dem nebenstehenden Schachbrettmuster (sodass die Ecken komplett grau sind). Die Färbung hat folgende Eigenschaft: Ein 2×1 Streifen bedeckt genau dann zwei gleiche Farben, wenn er geknickt wird.
Eine Seite hat 41 graue und 40 weisse Quadrate. Auf allen Seiten zusammen also 246 graue und 240 weisse Quadrate.
Dies hat zur Folge, dass es genau drei doppelgraue Streifen mehr geben muss als Doppelweisse. Insgesamt ist dies dann eine ungerade Anzahl Streifen mit Doppelfarbe, also den geknickten Streifen. (formeller: wenn x die Anzahl doppelweisser ist, so muss $x + 3$ die Anzahl doppelgrauer sein. Die Summe $2x + 3$ ist immer ungerade)

1.15 Auf einem Feld eines 5×5-Brettes steht -1 und in den anderen 24 Feldern steht 1. Wir können alle Vorzeichen in einem $a \times a$-Teilquadrat umkehren, wobei $2 \leq a \leq 5$. Zeige, dass die -1 am Anfang in der Mitte sein muss, damit man lauter 1 daraus machen kann.

Lösung:



Wir färben zweimal mit den nebenstehenden Färbungen. Wir erkennen, dass jedes mögliche Quadrat (beliebiger Grösse und beliebiger Ort) immer eine gerade Anzahl grauer Felder umkehrt.
Was dies bedeutet: Wenn die -1 am Anfang auf einem grauen Feld ist, so ist dies eine ungerade Anzahl (nämlich 1 Feld). Wenn wir nun eine gerade Anzahl grauer Felder invertieren, so ist danach immer noch eine ungerade Anzahl grauer Felder mit -1 auf dem Brett. Wir können also nie erreichen, dass 0 graue Felder (eine gerade Anzahl) eine -1 haben.
Damit darf die -1 nicht auf einem grauen Feld sein. Betrachtet man beide Färbungen, bleibt dafür nur noch das Mittelfeld übrig. Mit ein bisschen Aufwand kann man sich auch davon überzeugen, dass es in diesem Fall tatsächlich möglich ist, irgendwann nur noch 1 auf dem Feld zu haben.