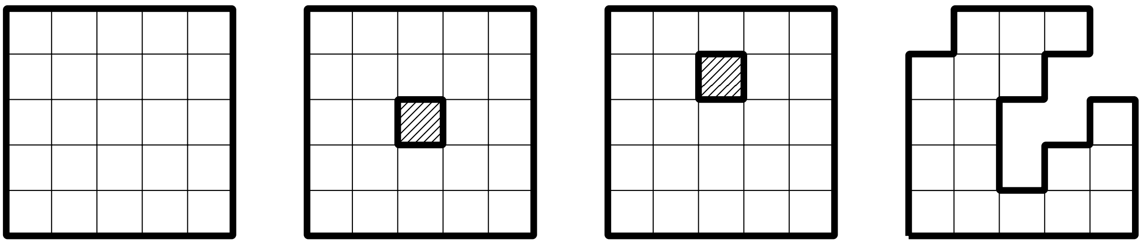
Preuves par coloration

Actualisé: 18 septembre 2016
vers. 1.0.0

1 Exercices

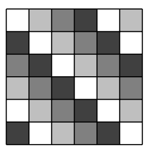
Mise en jambes

1.1 Peut-on recouvrir les figures ci-dessous avec des dominos 1×2 sans trou ni superposition de deux pièces ?
Remarque : Si oui, montrez comment. Sinon, montrez que c'est impossible.



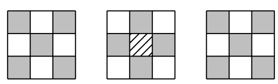
Solution :
Image 1 : nombre impair de cases → impossible
Image 2 : possible
Image 3 : coloration de l'échiquier → impossible
Image 4 : On commence à un des coins, et on remarque rapidement que c'est impossible.

1.2 Quel est le nombre maximal de Straight-Tetrominos (1×4) que l'on peut poser dans un carré 6×6 sans recouvrement ?
Solution :
On utilise la coloration standard à 4 couleurs : chaque Straight-Tetromino recouvre une case de chaque couleur. Or, comme il n'y a que 8 cases gris foncé, on peut en placer au maximum 8 dans le carré.



blanc : 10
gris clair : 9
gris foncé : 8
noir : 9

1.3 Peut-on placer 13 blocs $1 \times 1 \times 2$ dans un cube $3 \times 3 \times 3$ dont on a retiré le cube central ?
Solution :
On utilise la coloration standard à 2 couleurs en trois dimensions. Ci-dessous sont dessinés les trois étages séparément. On reconnaît ainsi qu'il y a 12 blocs blancs et 14 noirs. Or, puisque chaque bloc $1 \times 1 \times 2$ recouvre un bloc blanc et un bloc noir, il n'est pas possible de remplir un tel cube.



1.4 Nous avons un échiquier de dimension

a) 8×8.

b) 9×9.

Sur chacune des cases se trouve un cafard. À un certain signal, tous les cafards se déplacent sur une case voisine, c'est-à-dire une case qui partage un côté commun avec la case de départ. Est-il possible qu'après le signal les cafards soient dans une configuration telle que chaque case soit occupée par exactement un cafard ?

Solution :

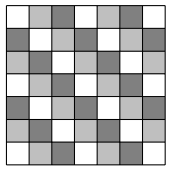
a) possible

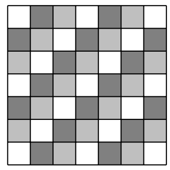
b) On colorie avec la coloration standard à 2 couleurs (coloration de l'échiquier). Il y a alors 41 cases noires et 40 blanches. Puisque un cafard se déplace d'une case blanche à une case noire ou inversement, il reste une case noire non occupée. Ce n'est donc pas possible.

1.5 On recouvre un carré 7×7 avec 16 Straight-Triominos (1×3) et un petit carré unité. Trouver toutes les positions possibles du carré unité.

Solution :

On utilise deux fois la coloration standard à 3 couleurs. Dans chaque coloration, il y a 1 case blanche de plus que pour les autres couleurs. Ainsi le carré unité doit recouvrir une case, qui est blanche dans les deux colorations. On remarque qu'il reste 9 positions possibles. Pour chacune d'elles, on peut effectivement trouver un recouvrement valable.





Avancé

1.6 Prouver que l'on ne peut pas remplir une caisse $90 \times 90 \times 90$ avec des Straight-Tetrominos.

Solution :

On colorie avec la coloration standard en 3D. On commence à remplir la caisse avec des Tetrominos. Si on le fait de manière systématique, il reste à la fin un bloc $1 \times 2 \times 2$ qui n'est pas recouvert, et dans lequel les 4 couleurs n'apparaissent pas toutes.

Nous avons ainsi montré que les 4 couleurs n'apparaissent pas un même nombre de fois dans la caisse. Il est ainsi impossible de remplir cette caisse avec des Tetrominos.

1.7 Prouver qu'un rectangle $a \times b$ peut être recouvert avec des rectangles $1 \times n$ si et seulement si n est un diviseur de a ou de b.

Solution :

Une solution rigoureuse est ici plutôt abstraite et technique. L'idée derrière devrait néanmoins être compréhensible.

Nous avons besoin ici d'une coloration standard à n couleurs. Chaque rectangle $1 \times n$ recouvrera alors exactement une case de chaque couleur. Cela signifie que nous devons avoir autant de cases de chaque couleur. Nous montrons que c'est le ca seulement si n est un diviseur de a ou de b :

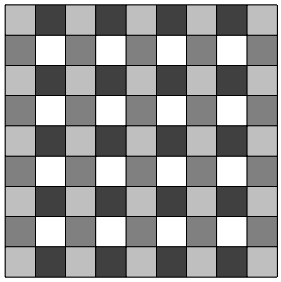
Il est facile de voir que dans un rectangle de taille $c \times d$ chaque couleur apparaît également souvent si c ou d est divisible par n. Soit maintenant $a = kn + r$ et $b = ln + s$. Puisque nous souhaitons seulement savoir si chaque couleur apparaît également souvent dans le rectangle $a \times b$, nous pouvons d'abord négliger un rectangle $k * n \times b$, puis un rectangle $r \times l * n$, et s'intéresser uniquement au reste, puisque dans les rectangles enlevés, chaque couleur apparaît déjà également souvent. Ce reste est un rectangle $r \times s$.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il y a moins de colonnes que de lignes. Nous considérons la couleur de la case en haut à gauche. Cette couleur apparaîtra dans chaque colonne exactement une fois (en effet, dans chaque colonne la couleur se décale une ligne en-dessous, jusqu'à ce qu'on atteigne le bord droit). Pour qu'on ait autant de cases de chaque couleur, il faut donc que chaque couleur apparaisse dans chaque ligne. Cela contredit alors le fait que les côtés

sont de longueur inférieure à n, puisque r et s sont le reste.
Ainsi dans ce reste il n'y a pas un nombre égal de cases de chaque couleur et donc le rectangle total ne peut être recouvert s'il existe un tel reste. Cela signifie donc qu'un des côtés doit être divisible par n.

1.8 Sur chaque case d'un échiquier 9×9 se trouve un cafard. À un certain signal, tous les cafards se déplacent en diagonale sur une case voisine. À l'issue de ce processus plusieurs cafards peuvent se retrouver sur la même case. Quel est le nombre minimum de cases libres après le signal ?

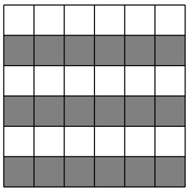
Solution :



Nous colorions d'après l'image. Les cafards se déplacent
· blanc ⇔ gris clair
· gris foncé ⇔ noir
Puisqu'il y a seulement 16 cases blanches contre 25 gris clair, il restera nécessairement 9 cases gris clair libres. Nous pouvons trouver une construction dans laquelle seules 9 cases restent libres, donc c'est le nombre minimum de cases libres.

1.9 Un échiquier $2n \times 2n$ est découpé en dominos 2×1. Prouver que le nombre de dominos horizontaux, ainsi que celui de dominos verticaux, est pair.

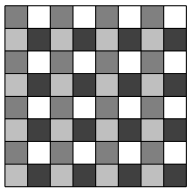
Solution :



Nous utilisons le motif en bandes. Comme les côtés sont de longueur paire, il y a autant de cases des deux couleurs.
Chaque domino vertical recouvre 1 case blanche et 1 case noire, et chaque domino horizontal recouvre soit 2 cases blanches, soit deux cases noires. Si le nombre de dominos horizontaux était impair, il y aurait soit plus de cases blanches recouvertes, soit plus de cases noires recouvertes, mais c'est une contradiction car il y a autant de cases blanches disponibles que de cases noires.

1.10 Sur une grande feuille à carreaux infinie sont marquées 2000 maisons. Prouver que l'on peut choisir 500 maisons de telle sorte que parmi celles-ci il n'y en ait pas deux qui partagent un même côté ou un même sommet.

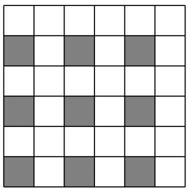
Solution :



Nous pouvons colorier la grande feuille infinie d'après l'image. D'après la coloration, les maisons de même couleur n'ont aucun côté ou sommet en commun. Puisqu'il y a 2000 maisons marquées, il existe une couleur telle que au moins 500 maisons sont de cette couleur. Nous pouvons alors choisir 500 maisons d'une même couleur.

1.11 Un sol rectangulaire est recouvert de catelles 1×4 et 2×2. Une catelle se casse, mais il reste une catelle de l'autre type en remplacement. Monter que le sol ne peut être recouvert en procédant à un réarrangement des catelles.

Solution :



Chaque catelle 2×2 recouvre toujours 1 case grise. Chaque catelle 1×4 recouvre soit 0, soit 2 cases grises.
Ainsi s'il y a un nombre impair de cases grises au sol, on aura besoin d'un nombre impair de catelles 2×2 et on ne peut pas le recouvrir par un nombre pair de catelles 2×2.
Le même argument fonctionne pour un nombre pair de cases grises.

Olympiade

1.12 Un coin d'un échiquier $(2n+1) \times (2n+1)$ manque. Pour quels n peut-on recouvrir l'échiquier avec des dominos de telle sorte qu'exactement la moitié des dominos soit placé horizontalement ?

Solution :

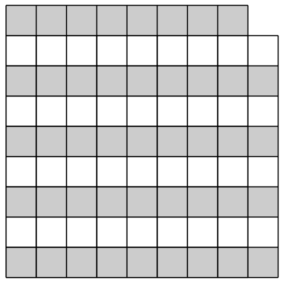
Nous colorions l'échiquier par un motif en bandes. Un domino vertical recouvre une case blanche et une case noire, alors qu'un domino horizontal recouvre soit deux blanches soit deux noires. Nous calculons :

. Nombre de cases : $4n^2 + 4n$

. Moitié des cases : $2n^2 + 2n$

. Nombre de cases noires : $(n+1)(2n+1) - 1 = 2n^2 + 3n$

. Nombre de cases blanches : $n(2n+1) = 2n^2 + n$



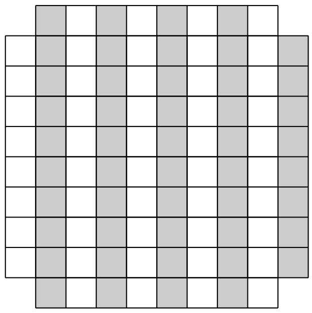
La différence entre les cases blanches et noires vaut donc $2n$. Puisque chaque domino recouvre deux cases, on a besoin de n dominos de plus qui recouvrent deux cases noires que deux cases blanches. Si x dominos recouvrent deux cases blanches, $x+n$ doivent recouvrir deux cases noires. En tout, il y en a $2x+n$ qui sont placés horizontalement.

Ceux-là recouvrent $4x + 2n$ cases. D'après l'exercice, ce nombre doit représenter la moitié des cases, donc $4x + 2n = 2n^2 + 2n \Leftrightarrow 4x = 2n^2$. Nous voyons par cette équation que n doit être pair.

On réfléchit encore assez facilement à une construction lorsque n est paire, et on voit que ça fonctionne toujours.

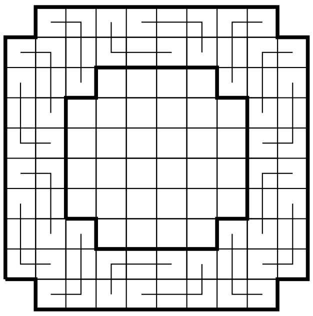
1.13 On enlève les 4 coins d'un échiquier $n \times n$. Pour quelles valeurs de n est-il possible de recouvrir cette figure avec des L-Tetrominos ?

Solution :



Nous voyons qu'un tel échiquier possède $n^2 - 4$ cases. Pour qu'il puisse être recouvert par des Tetrominos, il faut forcément que n soit pair.

On colorie l'échiquier avec un motif en bandes. Ce coloriage a la propriété que chaque L-Tetromino recouvre 1 case noire et 3 cases blanches ou inversement. De plus, il y a autant de cases noires que de cases blanches. Le nombre de L-Tetrominos doit donc être pair. Ainsi le nombre total de cases est divisible par 8, ce qui signifie que n n'est pas divisible par 4.

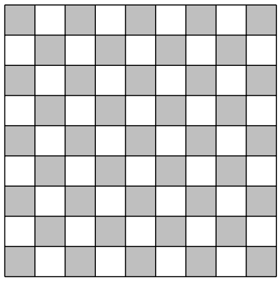


Pour tous les n qui sont pairs mais pas divisibles par 4, on peut recouvrir l'échiquier. Nous pouvons commencer la construction depuis l'extérieur. Ici le cas $n = 10$ est dessiné, avec l'anneau extérieur. Nous pouvons utiliser à l'intérieur la même construction dans les coins.

1.14 Les faces d'un dé $9 \times 9 \times 9$ sont divisées en carrés 1×1. Le dé est recouvert complètement et sans chevauchement par des bandes 2×1. Les côtés des bandes suivent les côtés des petits carrés. Prouver que le nombre de bandes pliées est impair.

Solution :

On colorie chacune des 6 faces avec la coloration d'échiquier ci-contre (de manière que les coins soient complètement gris). La coloration a la propriété suivante : Une bande 2×1 recouvre deux fois la même couleur si et seulement si elle est pliée.
Une face a 41 carrés gris et 40 blancs. Il y a donc sur l'ensemble des faces 246 carrés gris et 240 blancs.
Par conséquent, il doit y avoir 3 bandes avec deux carrés gris de plus que de bandes avec deux carrés blancs. En tout il y a ainsi un nombre impair de bandes avec deux fois la même couleur, donc de bandes pliées. (formellement : si x est le nombres de bandes avec deux carrés blancs, $x + 3$ est le nombre de bandes avec deux carrés gris. Leur somme $2x + 3$ est toujours impaire).



1.15 Sur une case d'un échiquier 5×5 est écrit -1 et sur les 24 autres cases 1. On peut inverser tous les signes dans un carré $a \times a$ avec $5 \geq a \geq 2$. Montrer qu'au début le -1 doit se trouver au milieu pour qu'on puisse obtenir un carré uniquement constitué de 1.

Solution :
On colorie deux fois avec les colorations ci-contres. On voit facilement que chaque carré possible (quelle que soit sa taille et sa position) contient toujours un nombre paire de cases grises.
Cela signifie donc que si le -1 se trouve au départ sur une case grise, alors il y en a un nombre impair (à savoir 1 case). Si l'on inverse un nombre pair de cases grises, alors il y aura toujours sur l'échiquier un nombre impair de cases grises sur lesquelles est écrit -1. Nous ne pouvons donc jamais obtenir que 0 cases grises (soit un nombre pair) contiennent le nombre -1.
Ainsi le -1 ne peut pas être écrit sur une case grise. En considérant les deux colorations, la seule place possible est donc le carré central. Après quelques essais on peut se persuader qu'il est effectivement possible dans ce cas de n'avoir plus que des 1 sur l'échiquier.