Dimostrazioni con le colorazioni

Thomas Huber

Aggiornato: 1 dicembre 2015
vers. 1.0.0

Con l'illustrazione di tre esempi, spiegheremo come utilizzare delle colorazioni per effettuare delle dimostrazioni, e come problemi possono essere risolti efficientemente, se si definiscono le colorazioni appropriate.

Un'importante classe di esempi sono i cosiddetti *tiling problems*, nei quali ci si chiede se un pavimento può essere coperto interamente, senza buchi e senza sovrapposizioni, da piastrelle di un certo tipo. I "pavimenti" sono in questi casi suddivisi in quadrati unitari, e le "piastrelle" devono essere posizionate in modo che i loro lati giacciano sui lati di questi quadrati.

Un primo esempio è il seguente antico problema: in quanti modi diversi si può coprire una scacchiera di grandezza 8×8 con pezzi del domino di grandezza 2×1? Il primo a trovare la risposta è stato fisico M.E. Fischer nel 1961: ci sono $2^4 \cdot 901^2 = 12988816$ modi diversi. Cosa succede invece, se dalla scacchiera eliminiamo i due quadretti che stanno in due angoli opposti, e cerchiamo di coprire questa scacchiera con 31 pezzi del domino? Questa seconda domanda sembra più difficile della prima, poichè la forma della scacchiera è più complicata. Invece, la risposta è molto più semplice, semplicemente non si può in nessun modo! Ciò si può dimostrare con una colorazione appropriata:

Esempio 1. *Da una scacchiera* 8×8 *vengono eliminati i quadretti in due angoli opposti. Dimostra che è impossibile coprire questa figura con* 31 *pezzi del domino di grandezza* 2×1.

Soluzione. I due quadretti eliminati avevano lo stesso colore, quindi nella scacchiera che resta ci sono 32 quadretti di un colore, e 30 dell'altro. Supponiamo che si possa coprire la scacchiera con pezzi del domino. Ogni pezzo copre un quadretto bianco e uno nero, indipendentemente da dove viene piazzato. Quindi dovrebbero esserci lo stesso numero di quadretti bianchi e di quadretti neri, una contraddizione. □

La prossima figura mostra tutte le "piastrelle" formate da al massimo quattro quadrati unitari. Dal momento che queste forme verranno usate più tardi negli esercizi, le presentiamo brevemente. Prima riga: Domino, Straight-Triomino e i due L-Triomino (simmetrici rispetto alla riflessione). Seconda riga: Straight-Tetromino, Square-Tetromino, T-Tetromino, L-Tetromino.

Ecco ora una esempio un po' più complicato ma nello stile dell' Esempio 1.

Esempio 2. *È possibile coprire una scacchiera di grandezza* 10×10 *senza buchi e senza sovrapposizioni, utilizzando piastrelle del tipo*

(a) *Straight-Tetromino?*

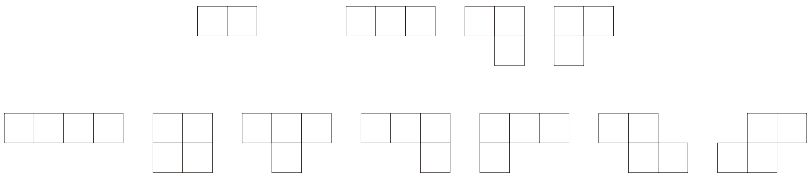

Figura 1: Domino, Triomini e Tetromini

(b) *T-Tetromino?*

Soluzione. (a) Coloriamo la scacchiera con quattro colori, come indicato nella Figura 2. Ogni piastrella 4×1 copre sempre esattamente un quadretto di ogni colore. D'altra parte ci sono però 26 quadretti bianchi e solo 25 neri. Quindi non è possibile coprire tutta la scacchiera.

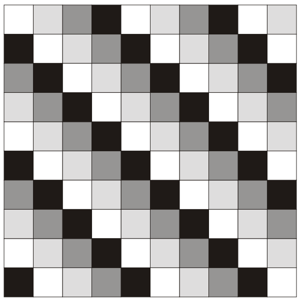

Figura 2: La colorazione standard con 4 colori

(b) Qui utilizziamo nuovamente la colorazione della scacchiera come nell' Esempio 1. Ogni T-Tetromino copre tre quadretti neri e uno bianco, oppure tre bianchi e uno nero. Supponiamo di poter coprire tutta la scacchiera, e sia a il numero di T-Tetromini utilizzati del primo tipo, e b quelli del secondo. Il numero di quadretti bianchi coperti è $a + 3b$, quello di quadretti neri coperti $3a + b$. Dato che la scacchiera ha lo stesso numero di quadretti bianchi e neri, deve valere $3a + b = 3b + a$ e quindi $a = b$. In particolare, vale che il numero di T-Tetromini deve essere *pari*. Ogni T-Tetromino copre 4 quadretti, e quindi il numero totale di quadretti deve essere divisibile per 8, il che però non è il caso, contraddizione. $\square$

La colorazione nella parte (a) si chiama *colorazione standard* con quattro colori. È chiaro come è definita la colorazione standard con n colori. Per $n = 2$, questa è per esempio proprio quella della scacchiera "classica". Queste particolari colorazioni si possono utilizzare abbastanza spesso, ma non sempre.

L'ultimo esempio mostra un'altra applicazione delle colorazioni.

Esempio 3. *Si consideri la griglia di tutti i punti con coordinate intere nel piano. Nei punti con coordinate* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$ *c'è un chip. Vale ora la seguente regola, che può essere applicata ripetutamente: si scelgano due chip arbitrariamente, e si consideri il punto che si ottiene della riflessione del primo chip rispetto al secondo. Se questo punto è ancora libero, si metta un chip anche in quel punto. È possibile che prima o poi ci sia un chip sul punto* $(1, 1)$*?*

Soluzione. Si colorino di rosso tutti i punti della griglia che hanno la coordinata x pari e la y dispari, mentre tutti gli altri punti siano colorati di nero. Due punti che sono simmetrici rispetto alla riflessione rispetto a un terzo punto, hanno sempre lo stesso colore (visto che sia le coordinate x che le y devono avere una differenza che sia pari). Nella situazione iniziale i tre chip sono posti su punti neri, e quindi anche tutti i nuovi chip verranno posti su punti neri. Il punto $(1, 1)$ è rosso, e quindi non ci sarà mai un chip su questo punto. $\square$