Färbungsbeweise

Thomas Huber

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

Wir werden an drei verschiedenen Beispielen erklären, was ein Färbungsbeweis ist, und wie man vertrackte Probleme durch Einsatz einer geeigneten Färbung lösen kann.

Eine wichtige Klasse von Beispielen sind sogenannte *Tiling Problems*, bei denen es grob gesagt um die Frage geht, ob man einen gegebenen Küchenboden mit Kacheln eines bestimmten Typs lückenlos und überlappungsfrei bedecken kann. Die "Böden" sind dabei in lauter Einheitsquadrate unterteilt und die "Kacheln" sollen stets so angeordnet werden, dass ihre Kanten auf den Seiten dieser Quadrate zu liegen kommen.

Ein prototypische Beispiel ist das folgende alte Problem: Auf wieviele verschiedene Arten kann man ein 8×8-Brett mit 2×1-Dominosteinen bedecken? Der Physiker M.E. Fischer hat 1961 als erster die richtige Lösung gefunden: es geht auf $2^4 \cdot 901^2 = 12988816$ verschiedene Arten. Was passiert nun, wenn man bei diesem Brett zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt, auf wieviele Arten lässt sich diese Figur mit 31 Dominosteinen bedecken? Die zweite Frage scheint noch schwieriger als die erste zu sein, denn die Form des Brettes ist komplizierter. In der Tat ist sie aber viel einfacher, es geht überhaupt nicht! Dies lässt sich mit einer geeigneten Färbung ganz einfach zeigen:

Beispiel 1. *Von einem* 8×8*-Brett werden zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt. Zeige, dass es unmöglich ist, diese Figur mit* 31 *Dominosteinen zu bedecken.*

Lösung. Färbe die Felder des Brettes abwechselnd schwarz und weiss, sodass ein Schachbrettmuster entsteht. Die beiden entfernten Eckfelder haben nun dieselbe Farbe, daher gibt es in der Figur 32 Felder der einen und 30 Felder der anderen Farbe. Nehme nun an, dass man die Figur mit Dominosteinen überdecken kann. Jeder Dominostein bedeckt stets ein weisses und ein schwarzes Feld, egal wo und wie man ihn platziert. Daraus würde nun aber folgen, dass es gleichviele weisse wie schwarze Felder geben müsste, ein Widerspruch.

□

Das nachstehende Bild zeigt alle "Kacheln" mit höchstens vier Einheitsquadraten. Da wir in den Aufgaben auf sie verweisen werden, stellen wir sie kurz vor. Oben: Domino, Straight-Triomino und die beiden spiegelsymmetrischen L-Triominos. Unten: Straight-, Square-, T-, L- und Skew-Tetromino.

Es folgt nun ein etwas komplizierteres Beispiel im gleichen Stil wie Beispiel 1.

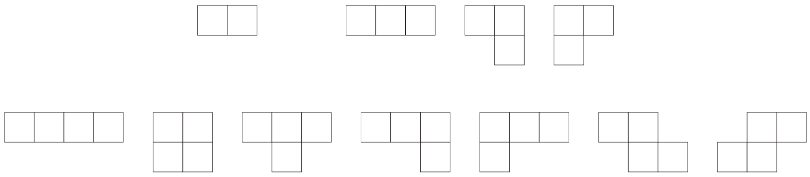

Abbildung 1: Domino, Triominos und Tetrominos

Beispiel 2. *Lässt sich ein* 10×10*-Brett lückenlos und überlappungsfrei überdecken mit*

(a) *Straight-Tetrominos?*

(b) *T-Tetrominos?*

Lösung. (a) Färbe das Brett mit vier Farben wie in Abbildung 2 gezeigt. Offenbar bedeckt jede 4×1-Kachel immer genau ein Feld von jeder Farbe. Andererseits gibt es 26 weisse Felder, aber nur 25 schwarze Felder. Folglich kann man das Brett nicht überdecken.

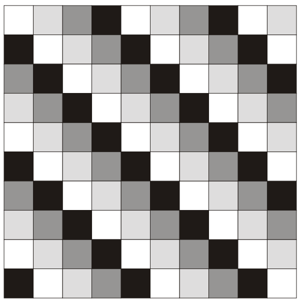

Abbildung 2: Die Standardfärbung mit 4 Farben

(b) Hier verwenden wir wieder die Schachbrettfärbung aus Beispiel 1. Jedes T-Tetromino bedeckt entweder drei schwarze und ein weisses Feld oder drei weisse und ein schwarzes Feld. Nehme an, man kann das Brett bedecken, und bezeichne mit a und b die Anzahl T-Tetrominos des ersten und zweiten Typs in dieser Überdeckung. Die Anzahl bedeckter weisser Felder ist dann $a + 3b$, die Anzahl bedeckter schwarzer Felder $3a + b$. Da das Brett gleichviele weisse wie schwarze Felder besitzt, muss $a + 3b = 3a + b$ gelten, also $a = b$. Insbesondere ist die Anzahl T-Tetrominos *gerade*. Da jedes T-Tetromino genau 4 Felder bedeckt, folgt daraus, dass die Gesamtzahl Felder des Brettes durch 8 teilbar sein muss. Dies ist nicht der Fall, Widerspruch.

□

Die Färbung in Teil (a) heisst *Standardfärbung* mit 4 Farben. Es ist klar, wie die Standard-Färbung mit n Farben aussieht. Für $n = 2$ ist es zum Beispiel gerade das Schachbrettmuster. Diese speziellen Färbungen kann man recht oft verwenden, wenn auch nicht immer.

Das letzte Beispiel zeigt eine etwas andere Anwendung von Färbungen.

Beispiel 3. *Betrachte in der Ebene das Gitter von allen Punkten mit ganzen Koordinaten. Auf den Punkten mit den Koordinaten* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *und* $(0, 1)$ *liegt je ein Chip. Man kann nun wiederholt folgendes tun: Wähle zwei beliebige Chips aus und betrachte den Punkt, der durch Punktspiegelung des ersten Chips am zweiten entsteht. Falls dieser Punkt noch frei ist, setze man dort ebenfalls einen Chip. Ist es möglich, dass irgendwann ein Chip auf dem Punkt* $(1, 1)$ *liegt?*

Lösung. Färbe alle Gitterpunkte mit ungerader x- und ungerader y-Koordinate rot und die restlichen Gitterpunkte schwarz. Man überlegt sich leicht, dass zwei Punkte, die spiegelsymmetrisch zu einem dritten Punkt liegen, stets dieselbe Farbe haben (denn sowohl die x- als auch die y-Koordinaten müssen sich dann um eine gerade Zahl unterscheiden). Am Anfang liegen alle drei Chips auf schwarzen Punkten, folglich müssen auch alle irgendwann durch Spiegelung entstandenen neuen Chips auf schwarzen Punkten liegen. Der Punkt $(1, 1)$ ist aber rot, daher kann dort nie ein Chip liegen.

□