Preuves par coloration

Thomas Huber

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

A travers trois exemples on va expliquer ce qu'est une preuve qui utilise des colorations et comment on peut résoudre des problèmes de manière efficace en utilisant une coloration appropriée.

Une classe importante d'exemples est ce que l'on appelle des *Tiling Problems*. Ce sont des problèmes qui traitent de la question si on peut complètement couvrir un sol de cuisine donné avec des carreaux d'un certain type sans qu'il y ait des imbrications. Le 'sol' est divisé en carrés unitaires et les 'carreaux' doivent être placées de manière à ce que leurs bords se trouvent sur les bords de ces carrés.

Un exemple type est le problème suivant : De combien de manières différentes peut-on couvrir un plateau 8×8 avec des dominos 2×1 ? Le physicien M.E. Fischer était le premier à trouver la solution en 1961 : il y a exactement $2^4 \cdot 901^2 = 12988816$ manières différentes. Que se passe-t-il maintenant si on enlève au plateau deux carrés de deux coins diagonalement opposés, de combien de manières peut-on le couvrir avec 31 dominos ? La deuxième question semble être plus difficile que la première car la forme du plateau est plus compliquée. En vérité elle est beaucoup plus simple, car on ne peut pas du tout couvrir le plateau ! Ceci peut être montré facilement à l'aide d'une coloration appropriée :

Exemple 1. *On a enlevé deux coins diagonalement opposés d'un plateau* 8×8. *Montrer qu'il est impossible de couvrir le plateau restant avec* 31 *dominos.*

Solution. On commence par colorer les cases du plateau en alternant noir et blanc de manière à obtenir un échiquier. Les deux coins que l'on vient d'enlever sont de la même couleur. Il reste donc 32 cases qui ont l'une et 30 cases qui ont l'autre couleur. Supposons que l'on peut les couvrir avec des dominos. Chaque domino couvre toujours une case blanche et une case noire indépendamment de l'endroit où on le place. Mais alors on devrait avoir le même nombre de cases noires et blanches, ce qui est une contradiction.

□

L'image suivante montre tous les carreaux d'au plus quatres carrés unitaires. Vu qu'on va parler d'eux dans les exercices, on les présente ici brièvement. En haut : Domino, Straight-Triomino et les deux L-Triominos symétriques. En bas : Straight-, Square-, T-, L- et Skew-Tetromino.

Voici un problème un peu plus compliqué qui ressemble à l'exemple 1.

Exemple 2. *Peut-on couvrir entièrement un plateau* 10×10 *sans imbrications avec des*

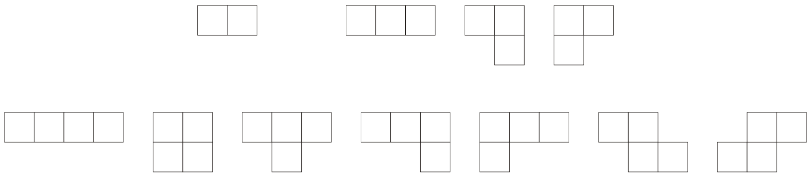

FIGURE 1 – Domino, Triominos et Tetrominos

(a) *Straight-Tetrominos ?*

(b) *T-Tetrominos ?*

Solution. (a) On commence par colorer le plateau avec 4 couleurs comme l'image 2 le montre. D'un côté chaque carreau 4×1 couvre toujours une case de chaque couleur. De l'autre côté il y a 26 cases blanches mais que 25 cases noires. Donc on ne peut pas couvrir le plateau.

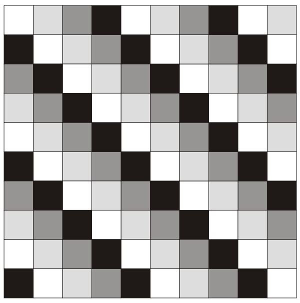

FIGURE 2 – La coloration standard avec 4 couleurs

(b) Ici on utilise la coloration d'échiquier comme dans l'exemple 1. Chaque T-Tetromino couvre ou trois cases noires et une blanche ou alors trois cases blanches et une case noire. Supposons que l'on puisse couvrir le plateau et appelons a et b le nombre de T-Tetrominos du premier et du deuxième type respectivement. Le nombre de cases blanches couvertes est alors $a + 3b$ et le nombre de cases noires couvertes $3a + b$. Puisque le plateau a le même nombre de cases noires et blanches il faut que $a + 3b = 3a + b$ et donc $a = b$. En particulier le nombre de T-Tetrominos doit être *pair*. Mais vu que le chaque T-Tetromino couvre exactement 4 cases, il s'ensuit que le nombre total de cases est divisible par 8. Ceci n'est pas le cas, contradiction.

□

La coloration de la partie (a) s'appelle *coloration standard* avec 4 couleurs. Il est clair ce qu'on entend par coloration standard avec n couleurs. Pour $n = 2$ on obtient la coloration d'un échiquier. Ces colorations particulières peuvent être utilisées assez souvent mais pas toujours.

Le dernier exemple montre une autre application de colorations.

Exemple 3. *Considérons dans le plan la grille de tous les points de coordonnées entières. On place un jeton sur les points avec les coordonnées* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$. *On a le droit de faire l'action suivante : Choisir deux jetons arbitraires et s'il y en a pas encore en mettre un autre* *sur l'image du premier après une symétrie centrée au deuxième. Est-il possible d'avoir un jeton sur le point* $(1,1)$ *?*

Solution. Colorer tous les points de la grille de coordonnées x et y impaire en rouge et les autres points en noir. On voit facilement que deux points qui sont symétriques par rapport à un troisième sont toujours de la même couleur (car les différences des coordonnées x et y doivent être pairs). Au début tous les jetons sont sur des points noirs donc tous les points qu'on peut obtenir seront noirs. Mais le point $(1,1)$ est rouge, donc il n'y aura jamais un jeton là-dessus. $\square$