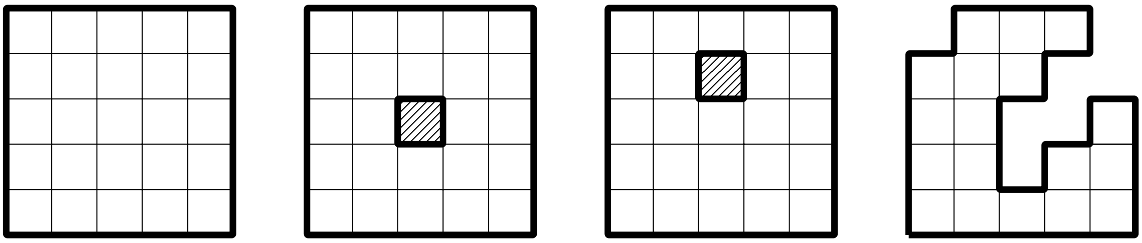
Färbungsbeweise

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

1 Aufgaben

Einstieg

1.1 Kann man überlappungsfrei und ohne Löcher die Figuren auf den Bildern unten mit 1×2 Dominosteinen bedecken?
Bemerkung: Falls ja, zeige wie. Falls nein, dann beweise, dass es unmöglich ist.



1.2 Wieviele Straight-Tetrominos (1×4) kann man maximal überlappungsfrei in ein 6×6 Quadrat legen?

1.3 Kann man aus 13 Ziegelsteinen der Grösse $1 \times 1 \times 2$ einen Würfel der Grösse $3 \times 3 \times 3$ mit einem $1 \times 1 \times 1$ grossen Loch in der Mitte bauen?

1.4 Wir haben ein Brett der Grösse

a) 8×8.

b) 9×9.

Auf jedem Feld sitzt ein Käfer. Auf ein Signal hin krabbeln alle Käfer auf ein benachbartes Feld, d.h. auf ein Feld, das eine gemeinsame Seite mit dem alten Feld hat. Können sich die Käfer nach dem Signal so arrangieren, dass wieder auf jedem Feld genau ein Käfer sitzt?

1.5 Ein 7×7 Quadrat ist mit 16 Straight-Triominos (1×3) und einem einzelnen Einheitsquadrat bedeckt. Finde alle möglichen Positionen des Einheitsquadrates.

Fortgeschritten

1.6 Beweise, dass man eine $90 \times 90 \times 90$ Kiste nicht mit Straight-Tetrominos ($1 \times 1 \times 4$) füllen kann.

1.7 Auf jedem Feld eines 9×9-Brettes sitzt ein Käfer. Auf ein Signal hin krabbeln alle Käfer diagonal auf ein benachbartes Feld. Danach können mehrere Käfer auf einem Feld sein. Was ist nach dem Signal die kleinstmögliche Anzahl freier Felder?

1.8 Ein $2n \times 2n$ Brett ist in 2×1 Dominos zerschnitten. Beweise, dass die Anzahl der horizontalen Dominosteine gerade ist.

1.9 Auf einem grossen karierten Blatt Papier sind 2000 Häuschen markiert. Man beweise, dass man von diesen 500 Häuschen wählen kann, sodass es keine zwei gewählten Häuschen gibt, die eine gemeinsame Seite oder Ecke haben.

1.10 Beweise, dass ein $a \times b$ Rechteck genau dann mit $1 \times n$ Rechtecken überlappungsfrei bedeckt werden kann, wenn n ein Teiler von a oder ein Teiler von b ist.

1.11 Ein rechteckiger Boden ist mit 1×4 und 2×2 Kacheln belegt. Eine Kachel geht zu Bruch, es steht jedoch eine Kachel des anderen Typs zur Verfügung. Zeige, dass der Boden nicht durch Umordnen der Kacheln geflickt werden kann.

Olympiade

1.12 Ein Eckfeld eines $(2n + 1) \times (2n + 1)$-Brettes fehlt. Für welche n kann man das Brett so mit Dominosteinen bedecken, genau gleich viele Dominosteine horizontal und vertikal liegen?

1.13 Von einem $n \times n$ Brett werden die 4 Eckfelder entfernt. Für welche Werte von n ist es möglich, diese Figur mit L-Tetrominos zu bedecken?

1.14 Die Seitenflächen eines $9 \times 9 \times 9$ Würfels sind in 1×1 Quadrate unterteilt. Der Würfel ist komplett und überlappungsfrei mit 2×1 Streifen beklebt. Die Seiten der Streifen verlaufen entlang der Seiten der kleinen Quadrate. Beweise, dass die Anzahl der geknickten Streifen ungerade ist.

1.15 Auf einem Feld eines 5×5-Brettes steht -1 und in den anderen 24 Feldern steht 1. Wir können alle Vorzeichen in einem $a \times a$-Teilquadrat umkehren, wobei $2 \leq a \leq 5$. Zeige, dass die -1 am Anfang in der Mitte sein muss, damit man lauter 1 daraus machen kann.

2 Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

1. **(Final 2003, 5.)** Auf einem Spielbrett mit 5×9 Feldern liegen n Steine, wobei zu jedem Zeitpunkt auf jedem Feld höchstens ein Stein liegen darf. Ein Spielzug besteht darin, jeden Stein in eines der angrenzenden Felder oben, unten, links oder rechts zu verschieben. Dies geschieht für alle Steine gleichzeitig. Wird dabei ein Stein in einem Zug horizontal bewegt, dann muss er im nächsten Zug vertikal bewegt werden und umgekehrt. Bestimme den grössten Wert für n, sodass es eine

Anfangsposition der n Steine und eine Folge von Spielzügen gibt, sodass dieses Spiel beliebig lange fortgesetzt werden kann.

2. **(Vorrunde 2007, 1.)** Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge $2a$. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind durch eine Strasse miteinander verbunden, falls ihr Abstand a beträgt. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal fährt?

3. **(Vorrunde 2006, 5.)** Betrachte ein $m \times n$-Brett, das in Einheitsquadrate unterteilt ist. Ein L-Triomino besteht aus einem Zentrumsquadrat und zwei Schenkelquadraten, also insgesamt aus drei Einheitsquadraten. In der Ecke oben links liegt ein L-Triomino, sodass das Zentrumsquadrat auf dem Eckfeld liegt. In einem Zug kann das L-Triomino um den Mitelpunkt von einem der beiden Schenkelquadrate um ein Vielfaches von $90°$ gedreht werden. Für welche m und n ist es möglich, dass das L-Triomino nach endlich vielen Zügen in der unteren rechten Ecke zu liegen kommt?

4. **(Final 2008, 4.)** Betrachte drei Seiten eines $n \times n \times n$-Würfels, die an einer der Würfelecken zusammenstossen. Für welche n ist es möglich, diese vollständig und überlappungsfrei mit Papierstreifen der Grösse 3×1 zu bedecken? Die Papierstreifen können dabei auch über die Kanten zwischen diesen Würfelseiten hinweggeklebt werden.

5. **(Vorrunde 2012, 5.)** Ein Brett der Grösse 11×11 soll mit Kacheln der Grösse 2×2, mit Skew-Tetrominos und mit L-Triominos überlappungsfrei bedeckt werden. Die Kacheln dürfen gedreht und gespiegelt werden. Wie viele L-Triominos werden dazu mindestens benötigt?

6. **(Vorrunde 2009, 5.)** Für welche natürlichen Zahlen m, n lässt sich ein $m \times n$-Rechteck mit lauter Quadraten der Seitenlänge 2 oder 3 lückenlos und überlappungsfrei bedecken?