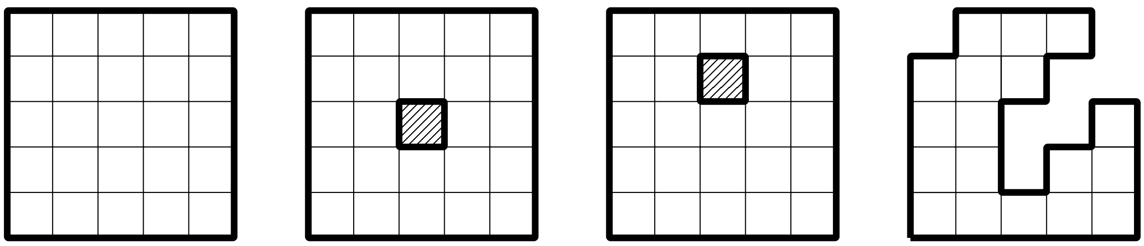
Preuves par coloration

Actualisé: 1er décembre 2015
vers. 1.0.0

1 Exercices

Mise en jambes

1.1 Peut-on recouvrir les figures ci-dessous avec des dominos 1×2 sans trou ni superposition de deux pièces ?
Remarque : Si oui, montrez comment. Sinon, montrez que c'est impossible.



1.2 Quel est le nombre maximal de Straight-Tetrominos (1×4) que l'on peut poser dans un carré 6×6 sans recouvrement ?

1.3 Peut-on placer 13 blocs $1 \times 1 \times 2$ dans un cube $3 \times 3 \times 3$ dont on a retiré le cube central ?

1.4 Nous avons un échiquier de dimension
  a) 8×8.
  b) 9×9.

Sur chacune des cases se trouve un cafard. À un certain signal, tous les cafards se déplacent sur une case voisine, c'est-à-dire une case qui partage un côté commun avec la case de départ. Est-il possible qu'après le signal les cafards soient dans une configuration telle que chaque case soit occupée par exactement un cafard ?

1.5 On recouvre un carré 7×7 avec 16 Straight-Triominos (1×3) et un petit carré unité. Trouver toutes les positions possibles du carré unité.

Avancé

1.6 Prouver que l'on ne peut pas remplir une caisse $90 \times 90 \times 90$ avec des Straight-Tetrominos.

1.7 Prouver qu'un rectangle $a \times b$ peut être recouvert avec des rectangles $1 \times n$ si et seulement si n est un diviseur de a ou de b.

1.8 Sur chaque case d'un échiquier 9×9 se trouve un cafard. À un certain signal, tous les cafards se déplacent en diagonale sur une case voisine. À l'issue de ce processus plusieurs cafards peuvent se retrouver sur la même case. Quel est le nombre minimum de cases libres après le signal ?

1.9 Un échiquier $2n \times 2n$ est découpé en dominos 2×1. Prouver que le nombre de dominos horizontaux, ainsi que celui de dominos verticaux, est pair.

1.10 Sur une grande feuille à carreaux sont marquées 2000 maisons. Prouver que l'on peut choisir 500 maisons de telle sorte que parmi celles-ci il n'y en ait pas deux qui partagent un même côté ou un même sommet.

1.11 Un sol rectangulaire est recouvert de catelles 1×4 et 2×2. Une catelle se casse, mais il reste une catelle de l'autre type en remplacement. Monter que le sol ne peut être recouvert en procédant à un réarrangement des catelles.

Olympiade

1.12 Un coin d'un échiquier $(2n + 1) \times (2n + 1)$ manque. Pour quels n peut-on recouvrir l'échiquier avec des dominos de telle sorte qu'exactement la moitié des dominos soit placé horizontalement ?

1.13 On enlève les 4 coins d'un échiquier $n \times n$. Pour quelles valeurs de n est-il possible de recouvrir cette figure avec des L-Tetrominos ?

1.14 Les faces d'un dé $9 \times 9 \times 9$ sont divisées en carrés 1×1. Le dé est recouvert complètement et sans chevauchement par des bandes 2×1. Les côtés des bandes suivent les côtés des petits carrés. Prouver que le nombre de bandes pliées est impair.

1.15 Sur une case d'un échiquier 5×5 est écrit -1 et sur les 24 autres cases 1. On peut inverser tous les signes dans un carré $a \times a$ avec $5 \geq a \geq 2$. Montrer qu'au début le -1 doit se trouver au milieu pour qu'on puisse obtenir un carré uniquement constitué de 1.

2 Exercices d'olympiades passées

1. **(Tour final 2003, 5.)** Sur un échiquier de dimensions 5×9 se trouvent n pièces, et à tout moment il peut y avoir au plus une pièce par case. Un coup consiste à déplacer chaque pièce dans une case adjacente, en haut, en bas, à gauche ou à droite. Toutes les pièces sont déplacées en même temps. Une pièce ayant bougé horizontalement doit bouger verticalement au coup suivant et inversement. Trouver la plus grande valeur pour n, telle qu'il existe une position de départ des n pièces et une suite de coups telle que le jeu puisse être continué jusqu'à la fin du monde.
2. **(Tour préliminaire 2007, 1.)** Soit un cube de longueur de côté $2a$. En chaque sommet, au milieu de chaque arête et de chaque face se trouve une ville. Deux villes sont reliées l'une à l'autre par un chemin si leur distance vaut a. Existe-t-il un itinéraire qui passe exactement une fois par chaque ville ?
3. **(Tour préliminaire 2006, 5.)** Considérons un échiquier $m \times n$ divisé en carrés unité. Un L-Triomino est composé de trois carrés unité, dont un carré central et deux carrés extérieurs. Dans

le coin en haut à gauche se trouve un L-Triomino tel que le carré central recouvre la case du coin. Un coup consiste à faire une rotation d'un multiple de $90°$ du L-Triomino autour du centre d'un de ses carrés extérieurs. Pour quels m et n est-il possible d'amener le L-Triomino dans le coin en bas à droite en un nombre fini de coups ?

4. **(Tour final 2008, 4.)** Soient trois faces d'un dé $n \times n \times n$ qui partagent un sommet commun. Pour quels n est-il possible de les recouvrir sans trou ni chevauchement avec des bandes de papier de dimension 3×1 ? Les bandes peuvent aussi être collées par-dessus une arête commune à deux des faces.
5. **(Tour préliminaire 2012, 5.)** Un échiquier de taille 11×11 doit être recouvert entièrement et sans chevauchement à l'aide de catelles 2×2, de Skew-Tetrominos et de L-Triominos. Les catelles peuvent subir des rotations ou des symétries axiales. Quel est le nombre minimal de L-Triominos nécessaires ?
6. **(Tour préliminaire 2009, 5.)** Pour quels nombres naturels m, n est-il possible de recouvrir entièrement et sans chevauchement un rectangle $m \times n$ avec des carrés de côté 2 ou 3 ?