MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Folgen

Arnaud Maret

Aktualisiert: 1. Januar 2020
vers. 1.0.1

In den letzten Jahren wurden die Probleme der Algebra bei den Internationalen Olympischen Spielen über die klassischen Funktionsgleichungen und andere Ungleichungen in drei Variablen hinaus neu ausgerichtet. Diese neuen Probleme drehen sich manchmal um Zahlenfolgen. Ihre Lösung besteht aus algebraischen Manipulationen und mehr Standardwerkzeugen wie Induktion. Oft klug und kurz, wird die Lösung manchmal mit akademischeren, sogar algorithmischen Methoden abgelehnt. Einige seiner Probleme haben einen Hauch von Zahlentheorie, sogar von Kombinatorik.

Dieses Skript bietet eine kurze Einführung in das Thema, die Definitionen der grundlegenden Konzepte sowie die wichtigsten grundlegenden Ergebnisse umfasst. Ein Ort der Wahl bleibt den Beispielen überlassen. Es versteht sich von selbst, dass Übung der Schlüssel ist, um die Probleme der Konsequenzen zu meistern.

Die meisten Beispiele und Übungen stammen aus der Sammlung der Algebra-Probleme *101 Probleme in der Algebra aus dem Training des USA IMO-Teams* von T. Andrescu und Z. Feng [1].

1 Ein erstes Beispiel

Beispiel 1 (IMO 2014)**.** *Sei $a_0, a_1, \dots$ eine Reihe von streng positiven ganzen Zahlen wie $a_0 < a_1 < \dots$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Ganzzahl $n \geq 1$ gibt*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Beweis. Sei $a_1, a_2, \dots$ eine Folge, die die Hypothesen des Problems erfüllt. Wir werden gebeten, die Existenz und Einzigartigkeit einer Zahl zu belegen. Wir werden daher die Lösung sauber schreiben, indem wir diese beiden unterschiedlichen Teile hervorheben.

Beginnen wir zunächst sofort mit Schritt Null eines Problems. Wir werden für diesen Schritt die Daten des Problems vergessen und uns nur auf den bereitgestellten algebraischen Ausdruck konzentrieren. Es ist eine Phase der Beobachtung und des Versuchs und Irrtums. Wir werden den Ausdruck auf mehrere Arten manipulieren, um äquivalente Formulierungen zu erhalten, die bestimmte Eigenschaften, *a priori*, verbergen.

[1] online verfügbar unter `https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/101-problems-in-algebra.pdf`

Wenn Sie hier zum Beispiel die Begriffe in a_n links gruppieren, erhalten Sie

$$\begin{aligned} a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} &\iff \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \\ &\iff a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Unter Verwendung der Hypothese $a_n > a_{n-1}$ in 1 folgt Folgendes

$$a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \implies a_{n-1} < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \tag{2}$$

Die Beziehung 2 hebt ein induktives Verhalten hervor. Wie in jedem ordnungsgemäß geschriebenen Induktionsargument führen wir logische Variablen ein, die mit n indiziert sind. ob

1. $L(n)$: Die Ungleichung $a_n < \frac{a_0+\ldots+a_n}{n}$ wird überprüft.
2. $R(n)$: Die Ungleichung $\frac{a_0+\ldots+a_n}{n} \leq a_{n+1}$ wird überprüft.

Die Beziehung 1 kann neu formuliert werden: $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$, wobei die durchgestrichene Notation die Negation des Satzes anzeigt (d. H. $\overline{R(n)}$ ist wahr, wenn $a_{n+1} < (a_0 + \ldots + a_n)/n$). Andererseits kann die Beziehung 2 $L(n) \Rightarrow L(n-1)$ geschrieben werden. Durch Kombinieren dieser beiden abstrakten Beziehungen unter Verwendung der Transitivität der Implikation folgt, dass $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$ und $R(n-1) \Rightarrow R(n)$. Zusammenfassend werden die folgenden Beziehungen überprüft:

(i) $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$,

(ii) $L(n) \Rightarrow L(n-1)$,

(iii) $R(n-1) \Rightarrow R(n)$,

(iv) $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$.

Wenn wir die kleinen Fälle betrachten, stellen wir fest, dass $L(1)$ immer wahr ist, weil $a_0 > 0$ nach Hypothese ist. Aus dem logischen Wert von $R(1)$ können wir jedoch im Allgemeinen nichts ableiten.

Es gibt daher zwei mögliche Szenarien. Entweder ist $L(n)$ für alle n wahr, oder es gibt einen minimalen $k \geq 2$ -Index, sodass $L(k)$ falsch ist. Wir werden diese beiden Fälle anhand von Tabellen zusammenfassen. Im ersten Fall erhalten wir durch (i), dass, wenn $L(n)$ für alle n wahr ist, $R(n)$ für alle n falsch ist:

n	1	2	3	
$L(n)$	✓	✓	✓	...
$R(n)$	×	×	×	...

Im zweiten Fall ergeben sich die zuvor aufgebauten Beziehungen

n		$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	
$L(n)$	...	✓	✓	×	×	×	...
$R(n)$	...	×	?	✓	✓	✓	...

Beachten Sie, dass es nicht möglich ist, den logischen Wert von $R(k-1)$ nur mit den bereits gemachten Beobachtungen (i), ..., (iv) zu schließen.

Kehren wir zum aufgeworfenen Problem zurück. Wir müssen die Existenz und die Eindeutigkeit eines Index n zeigen, so dass $L(n)$ und $R(n)$ gleichzeitig wahr sind. In unserer Tabelle ist dies der Fall, wenn genau eine Spalte zwei ✓enthält. Bisher kann nicht geschlossen werden. Insbesondere fehlen noch Informationen, um den ersten Fall auszuschließen, in dem $L(n)$ für alle n gilt. Andererseits gibt es in den beiden Tabellen höchstens eine Spalte, die zwei ✓enthält, um die Eindeutigkeit abzuschließen. Es bleibt die Existenz zu beweisen und dafür wird es notwendig sein, sich für einen anderen Ansatz zu entscheiden.

Was bedeutet es, Existenz in diesem Problem zu zeigen? Wir haben eine Sammlung von Intervallen $(a_n, a_{n+1}]$ und eine Sammlung von Ausdrücken $(a_0 + \ldots + a_n)/n$. Wir müssen zeigen, dass einer dieser Ausdrücke in der steht Gutes Intervall: Es wäre einfacher, wenn der gesuchte Ausdruck nicht mehr von n abhängen würde. Mit anderen Worten, wenn wir einen einzigen gegebenen Ausdruck und eine Sammlung von Intervallen hätten, selbst wenn dies das Ändern der Intervalle bedeutete das überlegen wir.

Wir können dies erreichen, indem wir a_0 isolieren, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \\ \Longleftrightarrow & (n-1) \cdot a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1 < a_0 \leq n \cdot a_{n+1} - a_n - \ldots - a_1. \end{aligned}$$

Mit $b_n := (n-1) \cdot a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1$ erhalten wir

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \Longleftrightarrow b_n < a_0 \leq b_{n+1}.$$

Beachten Sie, dass $b_1 = 0$ und $b_{n+1} - b_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$ sind. Die Existenz des gesuchten n entspricht daher der Existenz eines Intervalls $(b_n, b_{n+1}]$, das a_0 enthält.

Es könnte sein, dass die Folge $b_1, b_2, \ldots$ oben durch eine ganze Zahl begrenzt ist, die streng kleiner als a_0 ist. In diesem Fall würde die gewünschte Existenz nicht verifiziert. jetzt

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_0 \\ &= (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \ldots + (a_n - a_1). \end{aligned}$$

Denken Sie daran, dass $a_n - a_{n-1} > 0$! Also, da $a_n - a_{n-1}$ eine ganze Zahl ist, haben wir außerdem $a_n - a_{n-1} \geq 1$. Es ist eine klassische Schätzung und es ist auch der einzige Ort, an dem wir die Hypothese anwenden, dass die Folge $a_0, a_1, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen ist. Ebenso $a_n - a_i \geq 1$ für $i < n$. Also $b_n \geq n - 1$.

Die Folge $b_1, b_2, \ldots$ ganzer Zahlen ist daher nicht oberhalb der Intervalle $(b_n, b_{n+1}]$ begrenzt, sondern unterteilt die reelle Nulllinie (= Da also a_0 eine rein positive Zahl ist, muss es sich um eines dieser Intervalle handeln, womit der Existenznachweis abgeschlossen ist.

Beachten Sie noch einmal, dass ein Intervall $(b_n, b_{n+1}]$, das a_0 enthält, unbedingt eindeutig ist, da alle Intervalle disjunkt sind. Auf diese Weise können wir also auch die Eindeutigkeit herstellen. □

2 Eine kleine Theorie

Definition 2.1. Eine *suite* ist eine geordnete, im Allgemeinen unendliche oder halb unendliche Sammlung von Zahlen. Zum Beispiel natürliche, ganze oder reelle Zahlen. Wir werden $(x_n)_{n\geq a}$ für eine (semi-unendliche) Sequenz notieren, die aus $a \in \mathbb{Z}$ und $(x_n)_{n=\infty}^{\infty}$ indiziert ist für eine (unendliche) Sequenz, die auf $\mathbb{Z}$ indiziert ist.

Beachten Sie, dass eine Folge von Zahlen $(x_n)_{n\geq 1}$ nichts anderes ist als eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \ldots$ zum passenden Set. Ebenso ist eine Folge $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ nichts anderes als eine Funktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Lassen Sie uns nun einige Eigenschaften der Suiten angeben.

Definition 2.2. Eine Suite (x_n) ist:

- *(streng) ansteigend*, wenn $x_{n+1} \overset{(>)}{\geq} x_n, \forall n$.
- *(streng) abnehmend*, wenn $x_{n+1} \overset{(<)}{\leq} x_n, \forall n$.
- *constant* wenn es eine Zahl c gibt wie $x_n = c, \forall n$. Wir schreiben $x_n \equiv c$.
- *periodic* wenn es eine ganze Zahl $k \geq 1$ gibt, so dass $x_{n+k} = x_n, \forall n$. Das kleinste k heißt *period* von (x_n).

Beispiel 2. *Die folgenden Sequenzen sind periodisch.*

1. *Die konstanten Folgen sind ab Periode 1 periodisch.*
2. *Die Folge $x_n := (-1)^n$ ist periodisch von Periode 2.*
3. *Die Folge $x_n := \sin(\frac{2\pi n}{m})$ ist periodisch mit der Periode m.*

Eine praktische Eigenschaft ist wie folgt. Der Beweis bleibt in der Übung.

Lemma 21. *Eine zunehmende (De-) Sequenz, die periodisch ist, ist notwendigerweise konstant.*

Definition 2.3. Eine Folge (x_n) lautet *bounded by below*, wenn es eine reelle Zahl A gibt, wie $A \leq x_n, \forall n$ und *bounded by above* s 'es gibt eine reelle Zahl B wie $x_n \leq B \forall n$. Es ist *bounded*, wenn es sowohl oben als auch unten begrenzt ist. Die Zahlen A und B heißen *bounds* (die Grenzen sind offensichtlich nicht eindeutig).

Beispielsweise ist eine Folge von (streng) positiven Zahlen per Definition unten begrenzt. Um auf diese Idee näher einzugehen, können wir *bounded* auf äquivalente Weise definieren, indem wir die Existenz einer reellen Zahl M wie $|x_n| \leq M, \forall n$ voraussetzen. In der Tat

$$|x_n| \leq M \iff -M \leq x_n \leq M.$$

Die Eigenschaft, gebunden zu sein, ist durch das folgende Lemma mit den Eigenschaften des (De-) Wachstums verbunden.

Lemma 22. *Eine durch oben / unten und zunehmende / abnehmende begrenzte Sequenz konvergiert.*

Wir werden in diesem Skript nicht auf die technischen Details der Konvergenzdefinition eingehen. Der intuitive Begriff der Konvergenz reicht für olympische Probleme aus. Zum Beispiel sind die konstanten Sequenzen konvergent. Die Folge $x_n := 1/n$ konvergiert gegen 0. Die Folge $x_n := n^2$ divergiert gegen unendlich. Die Folge $x_n := (-1)^n$ ist nicht konvergent.

Intuitiv kann eine zunehmende Folge, die in einem Achsensystem dargestellt ist, nur "steigen". Wenn es von oben begrenzt ist, gibt es eine Obergrenze, die es nicht überschreiten darf. Wenn Sie nicht wieder nach unten gehen können, "konvergiert" die Fortsetzung auf einen Wert unterhalb der Obergrenze.

In den folgenden Beispielen werden zwei Hauptfamilien von Suiten vorgestellt.

Beispiel 3 (Rechenfolgen)**.** *Eine Folge (x_n) ist arithmetic, wenn es eine Zahl r gibt, die reason heißt, so dass $x_{n+1} = x_n + r$ für alle n. Auf Französisch erhält man jedes Element der Sequenz aus der vorherigen, indem man r addiert. Zeigen Sie, dass wenn (x_n) eine arithmetische Folge von Grund r ist, $x_n = x_0 + nr, \forall n$.*

Lösung. Wir begründen offensichtlich durch Induktion. Wenn $n = 0$ ist, ist das Ergebnis klar. Angenommen, das Ergebnis wird für n verifiziert und für $n+$ 1 angezeigt. Definitionsgemäß und unter Verwendung der Induktionshypothese

$$x_n + 1 = xn + r = (x0 + nr) + r = x0 + (n + 1)r.$$

Wenn die Sequenz mit $\mathbb{Z}$ indiziert ist, können wir auf ähnliche Weise zeigen, dass, wenn die Schlussfolgerung für n verifiziert ist, sie auch für $n - 1$ verifiziert ist. $\square$

Abhängig vom Wert des Grundes erfüllt eine arithmetische Folge die folgenden Eigenschaften:

- Wenn $r = 0$ ist, ist die Reihenfolge konstant.
- wenn $r \neq 0$, dann divergiert die Sequenz gegen unendlich. Genauer gesagt, wenn $r > 0$, dann divergiert die Sequenz in Richtung Unendlichkeit, und wenn $r < 0$, dann divergiert die Sequenz in Richtung Unendlichkeit.

Beispiel 4 (Geometrische Sequenzen)**.** *Eine Folge (x_n) ist geometric, wenn es eine Zahl r gibt, die reason heißt, so dass $x_{n+1} = r \cdot x_n$ für alle n . Im Französischen erhält man jedes Element der Sequenz aus dem vorherigen, indem man mit r multipliziert. Zeigen Sie, dass wenn (x_n) eine arithmetische Folge von Grund r ist, $x_n = r^n \cdot x_0, \forall n$.*

Die Lösung ist wie bei arithmetischen Folgen induktiv.

Abhängig vom Wert des Grundes erfüllt eine geometrische Sequenz die folgenden Eigenschaften:

- Wenn $r = 0$ oder $x_0 = 0$, ist die Sequenz konstant Null: $x_n \equiv 0$.
- Wenn $r = 1$ ist, ist die Reihenfolge konstant.
- Wenn $r > 1$ und $x_0 \neq 0$, dann ist die Sequenz nach dem Vorzeichen von x_0 mehr oder weniger unendlich.
- Wenn $0 < |r| < 1$ ist, konvergiert die Sequenz gegen Null.

Beispiel 5. *Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Reihe reeller Zahlen, so dass $x_1 = 2$ und*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Suchen Sie einen expliziten Ausdruck für x_n.

Lösung. Wir beginnen mit einigen Beobachtungen zum Follow-up, wobei wir die Schlussfolgerung vergessen. Zunächst stellen wir fest, dass die Folge (x_n) eine Folge von streng positiven Zahlen ist. Nach Induktion sind $x_1 > 0$ und $x_{n+1} > 0$, wenn $x_n > 0$. Genauer gesagt können wir zeigen, dass $x_n \geq \sqrt{2}$. Durch Induktion erhalten wir $x_1 = 2 > \sqrt{2}$ und AM-GM, wie $x_n > 0$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x_n}{2} \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Was können wir über das mögliche (De-) Wachstum des Ergebnisses sagen? Eine kleine Inspektion zeigt, dass das Ergebnis abnimmt. In der Tat, wie $x_n \geq \sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2} = x_n.$$

Da die Folge (x_n) abnimmt und von unten begrenzt ist, ist sie konvergent. Wie kann man den Wert bestimmen, gegen den die Sequenz konvergiert? Die Sache (die im engeren Sinne nicht bewiesen ist) ist, dass wir am Limit "$x_{n+1} = x_n$" haben. Wenn wir das Limit der Folge (x_n) mit x bezeichnen, haben wir unter der Annahme $x_{n+1} = x_n = x$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Wie bei $x_n \geq \sqrt{2}$ haben wir $x = \sqrt{2}$.

Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $y_n := x_n - \sqrt{2}$, da wir es vorziehen, mit Sequenzen zu arbeiten, die gegen Null konvergieren. Der Ausgangszustand wird

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{y_n + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{y_n + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Der algebraische Trick greift jetzt ein. Wir erkennen in dem Term $2(y_n + \sqrt{2})$ ein fast doppeltes Produkt, das mit dem Term y_n^2 assoziiert werden könnte. Es fehlt jedoch ein Faktor $2\sqrt{2}$. Indem wir es hinzufügen, erhalten wir

$$y_{n+1} + 2\sqrt{2} = \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})} + 2\sqrt{2} = \frac{(y_n + 2\sqrt{2})^2}{2(y_n + \sqrt{2})}.$$

Wenn wir die letzten beiden Ausdrücke betrachten, bemerken wir ein induktives Schema. Insbesondere

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1}+2\sqrt{2}} = \frac{y_n^2}{2(y_n+\sqrt{2})} \cdot \frac{2(y_n+\sqrt{2})}{(y_n+2\sqrt{2})^2} = \left(\frac{y_n}{y_n+2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Es ist gewonnen! Eine solche induktive Formel ist zu ästhetisch, um nicht der Schlüssel zum Problem zu sein. Induktiv und mit $y_1 = 2-\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1}+2\sqrt{2}} = \left(\frac{y_n}{y_n+2\sqrt{2}}\right)^2 = \ldots = \left(\frac{y_1}{y_1+2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}.$$

Zurück zur Folge (x_n) erhalten wir

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

Dies ermöglicht es uns, x_{n+1} zu isolieren und zu schließen. □

3 Tipps und Tricks zum Mitnehmen

Um ein Sequenzproblem zu lösen, empfehlen wir den folgenden Ansatz.

a.1) **Algebraische Manipulationen:** Wie in den vorherigen Beispielen ist es gut, zunächst mit dem im Problem angegebenen Ausdruck zu spielen und den Rest der Anweisung zu vergessen. Manipulieren Sie den Ausdruck im Überfluss, indem Sie versuchen, induktive, teleskopische Muster oder ästhetische Formeln hervorzuheben.

Dieser Schritt ist der Schlüssel, und die Zeit, sich dem zu widmen, sollte nicht übersehen werden. Im Allgemeinen gibt es für Probleme mehrere Lösungen, von denen eine kurz und subtil ist und eine technischere und längere, aber weniger clevere.

a.2) **Standardeigenschaften:** In der Annäherungsphase interessieren uns auch die möglichen Eigenschaften, die durch die im Problem angegebene Reihenfolge (z. B. Periodizität, (De-)Wachstum, …).

Es ist auch nützlich, wenn eine induktive Formel angegeben wird, die ersten Terme einer Sequenz explizit zu berechnen. In einigen Fällen können wir sogar hoffen, aus einer induktiven Formel eine explizite Formel zu erhalten.

b) **Putting order:** Unter Verwendung der in den vorherigen Punkten gemachten Beobachtungen können wir versuchen, den algebraischen Ausdruck durch relevante Substitutionen zu vereinfachen (zum Beispiel $y_n := 1/x_n$, $\Delta_n := x_n - x_{n-1}$ oder $y_n := x_n - x$ wobei x die vermutete Grenze der Folge (x_n) ist). Durch eine gute Substitution können Sie klarer sehen.

c) **Konzentrieren Sie sich auf die Schlussfolgerung:** In diesem Schritt kehren wir zum ursprünglichen Problem zurück und versuchen, die zuvor erhaltenen Elemente zusammenzusetzen, um die gewünschte Aussage zu demonstrieren.

Come on! Ein weiteres letztes Beispiel für die Straße.

Beispiel 6. *Sei* $(x_n)_{n\geq 1}$ *eine Reihe von reellen Zahlen ungleich Null, so dass*

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 3.$$

Ermitteln aller möglichen Werte von x_1 *und* x_2*, sodass die Sequenz* (x_n) *einen ganzzahligen Wert für eine Unendlichkeit von Indizes* n *annimmt.*

Erste Lösung. Sei (x_n) eine solche Folge. Wir beginnen mit dem algebraischen Manipulationsschritt. Indem wir den gegebenen Ausdruck auf verschiedene Arten manipulieren, erhalten wir früher oder später die folgende Beziehung:

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}}.$$

Diese Beziehung hebt die Rolle hervor, die das Inverse von x_n spielt. In der Tat haben wir

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Dieser Ausdruck schlägt sofort die Ersetzung $y_n := 1/x_n$ vor, die gültig ist, weil die x_n alle nicht Null sind. Die neue Suite (y_n) erfüllt die folgende Schlüsselbeziehung:

$$y_n + y_{n-2} = 2y_{n-1}.$$

Diese Beziehung impliziert, dass die Folge (y_n) eine arithmetische Folge ist (siehe Übung). Sei r der Grund für die Folge (y_n). Denken Sie daran, dass die Folge (y_n) gegen unendlich abweicht, es sei denn, $r = 0$. In diesem Fall ist die Folge konstant.

Unter Verwendung dessen ist die Folge (x_n) eine ganze Zahl für eine Unendlichkeit von Indizes n, wir wissen, dass $|x_n| \geq 1$ für dieselbe Unendlichkeit von Indizes n ist (weil $x_n \neq 0$ nach Annahme). Für diese Indizes n haben wir also $|y_n| \leq 1$. Die Folge (y_n) divergiert also nicht gegen unendlich. Es ist daher durch die vorherige Bemerkung konstant.

Die Folge (x_n) ist ebenfalls konstant und diese Konstante ist eine Ganzzahl ungleich Null. Folglich ist $x_1 = x_2$ eine Ganzzahl ungleich Null.

Umgekehrt, wenn $x_1 = x_2$ eine ganze Zahl ungleich Null ist, dann ist $x_n = x_1$ für alle n und die Folge (x_n) nimmt daher ganze Werte für eine Unendlichkeit von Indizes n an . □

Zweite Lösung. Sei (x_n) wieder eine Folge, die die Schlussfolgerungen des Problems erfüllt. In dieser Lösung beginnen wir eher mit der Berechnung der ersten Terme der Sequenz. Wir bekommen

$$x_3 = \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2},$$

dann

$$x_4 = \frac{x_2x_3}{2x_2 - x_3} = \frac{x_2\frac{x_1x_2}{2x_1-x_2}}{2x_2 - \frac{x_1x_2}{2x_1-x_2}} = \frac{x_1x_2}{3x_1 - 2x_2}.$$

Wir sind daher versucht, dies zu vermuten

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2} = \frac{x_1x_2}{n(x_1 - x_2) + 2x_2 - x_1}.$$

Eine einfache Induktion ermöglicht es, diese Aussage zu verifizieren.

Das Vorhandensein des n im Nenner des expliziten Ausdrucks für x_n zeigt, dass (x_n) gegen Null konvergiert, außer wenn $x_1 = x_2$. In diesem Fall spielt das n des Nenners keine Rolle. Da die Folge (x_n) nach der Hypothese niemals Null ist, kann ein ganzzahliger Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annehmen, wenn er gegen Null konvergiert. Wir schließen daraus, dass die Folge (x_n) nicht gegen Null konvergiert und somit $x_1 = x_2$. Das Ende des Beweises ist identisch mit der vorherigen Lösung. $\square$