MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Les suites

Arnaud Maret

Actualisé: 1er août 2021
vers. 1.2.1

Table des matières

1 Introduction

Depuis quelques années, les problèmes d'algèbre aux Olympiades Internationales se réorientent au-delà des classiques équations fonctionnelles et autres inégalités en trois variables. Ces nouveaux problèmes s'articulent désormais autour de suites de nombres. Leur solution est faite de manipulations algébriques et d'outils plus standards tels que l'induction. Souvent astucieuse et courte, la solution se décline parfois à l'aide de méthodes plus académiques, voire algorithmiques. Certains de ses problèmes ont une saveur de théorie des nombres, voire de combinatoire.

Ce script fournit une brève introduction au sujet, couvrant les définitions des concepts de base, ainsi que les principaux résultats élémentaires. Une place de choix est laissée aux exemples. Il y a en effet, tout comme pour les équations fonctionnelles, très peu de théorie. Il va s'en dire que la pratique est la clé pour maitriser les problèmes de suites.

La plupart des exemples et des exercices sont empruntés du recueil de problèmes d'algèbre *101 Problems in Algebra from the training of the USA IMO Team* par T. Andrescu et Z. Feng[1].

1.1 Un premier exemple

Exemple 1 (IMO 2014) *Soit* $a_0, a_1, \ldots$ *une suite de nombres entiers strictement positifs telle que* $a_0 < a_1 < \ldots$. *Montrer qu'il existe un unique nombre entier* $n \geq 1$ *tel que*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Première solution. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite qui satisfait les hypothèses du problème. On nous demande de montrer l'existence et l'unicité d'un certain nombre. Nous rédigerons donc la solution au propre en mettant en évidence ces deux parties distinctes.

Tout d'abord, commençons par l'étape zéro de tout problème de suites. C'est-à -dire, on va, dans un premier temps, oublier la donnée du problème et **se concentrer uniquement sur l'expression algébrique fournie**. C'est une phase d'observation et de tâtonnement. On va manipuler l'expression donnée de multiples manières avec pour but d'obtenir des formulations équivalentes mettant certaines propriétés, *a priori* dissimulée, en évidence.

[1] disponible en ligne sous https://mathematicalolympiads.files.wordpress.com/2012/08/101-problems-in-algebra.pdf

Par exemple, ici, en regroupant les termes en a_n à gauche, on obtient

$$\begin{aligned} a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

En utilisant l'hypothèse $a_n > a_{n-1}$ dans (1), il s'en suit

$$a_n < \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad a_{n-1} < \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}. \tag{2}$$

La relation (2) met en évidence un comportement **inductif**. Comme dans toute argumentation par induction proprement rédigée, on introduit des variables logiques indexées sur n. Soient

1. $L(n)$: l'inégalité $a_n < \frac{a_0+\ldots+a_n}{n}$ est vérifiée,
2. $R(n)$: l'inégalité $\frac{a_0+\ldots+a_n}{n} \leq a_{n+1}$ est vérifiée.

On peut reformuler le problème en termes des variables logiques $L(n)$ et $R(n)$: il s'agit de montrer qu'il existe un unique entier n tel que $L(n)$ et $R(n)$ sont vraies.

La relation (1) peut être reformulée par $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$, où la notation barrée indique la négation de la proposition (c'est-à -dire, $\overline{R(n)}$ est vraie si $a_{n+1} < (a_0 + \ldots + a_n)/n$). La relation (2), quant à elle, peut être écrite $L(n) \Rightarrow L(n-1)$. En combinant ces deux relations abstraites à l'aide de la transitivité de l'implication, il s'en suit que $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$ et $R(n-1) \Rightarrow R(n)$. En résumé, les relations suivantes sont vérifiées:

(i) $L(n) \Leftrightarrow \overline{R(n-1)}$,

(ii) $L(n) \Rightarrow L(n-1)$,

(iii) $R(n-1) \Rightarrow R(n)$,

(iv) $\overline{R(n)} \Rightarrow L(n)$.

Si l'on considère les petits cas, alors on remarque que $L(1)$ est toujours vraie parce que $a_0 > 0$ par hypothèse. Par contre, nous ne pouvons rien déduire de la valeur logique de $R(1)$ en général.

Il existe donc deux cas de figure possibles. Soit $L(n)$ est vraie pour tout n ou il existe un indice $k \geq 2$ minimal tel que $L(k)$ soit fausse. On va synthétiser ces deux cas à l'aide de tableaux.

1. Supposons que $L(n)$ soit vraie pour tout n. Par (i), on obtient que, si $L(n)$ est vraie pour tout n, alors $R(n)$ est fausse pour tout n:

n	1	2	3	
$L(n)$	✓	✓	✓	...
$R(n)$	×	×	×	...

2. Dans le deuxième cas, on suppose qu'il existe un indice $k \geq 2$ minimal tel que $L(k)$ soit fausse. Ainsi, par minimalité, $L(n)$ est vraie pour tout $n < k$. La relation (ii) implique que $L(n)$ est fausse pour tout $n \geq k$. En utilisant la relation (i), on obtient

n		$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	
$L(n)$	$\ldots$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$
$R(n)$	$\ldots$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\ldots$

Revenons au problème posé. On doit montré l'existence et l'unicité d'un indice n tel que $L(n)$ et $R(n)$ soient simultanément vraies. Dans notre table, c'est le cas si exactement une colonne contient deux $\checkmark$. On observe que c'est le cas dans le deuxième tableau. Il ne reste plus qu'à exclure le cas où $L(n)$ est vraie pour tout n.

Si $L(n)$ est vraie pour tout n, alors pour tout n on a

$$\begin{aligned} & (n-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1 < a_0 \\ \iff \quad & (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \ldots + (a_n - a_1) < a_0. \end{aligned}$$

Rappelez-vous que $a_n - a_{n-1} > 0$. Or, comme $a_n - a_{n-1}$ est un nombre entier par hypothèse, on a en fait $a_n - a_{n-1} \geq 1$. C'est une estimation classique et c'est aussi le seul endroit où l'on emploie l'hypothèse que la suite $a_0, a_1, \ldots$ est une suite de nombres entiers. De même, $a_n - a_i \geq 1$ pour $i < n$. Donc, on obtient

$$n - 1 < a_0, \quad \forall n \geq 1.$$

Contradiction.

□

Deuxième solution. Que signifie montrer l'existence dans ce problème ? On a une collection d'intervalles $(a_n, a_{n+1}]$ et une collection d'expressions $(a_0 + \ldots + a_n)/n$. Il faut montrer qu'une de ces expressions se trouve dans le bon intervalle. Il serait plus simple si l'expression que l'on cherchait à localiser ne dépendait plus de n. Autrement dit, s'il on avait une seule expression donnée et une collection d'intervalles, quitte à modifier les intervalles que l'on considère.

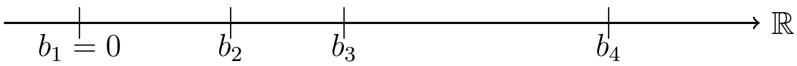
On peut arriver à cette fin en isolant a_0, par exemple:

$$\begin{aligned} & a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \\ \iff \quad & (n-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1 < a_0 \leq n a_{n+1} - a_n - \ldots - a_1. \end{aligned}$$

Avec $b_n := (n-1) \cdot a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1$, on obtient

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \quad \iff \quad b_n < a_0 \leq b_{n+1}.$$

Observer que $b_1 = 0$ et $b_{n+1} - b_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$. L'existence du n recherché est donc équivalente à l'existence d'un intervalle $(b_n, b_{n+1}]$ contenant a_0.



Si la suite $b_1, b_2, \ldots$ de nombres entiers n'est pas *bornée* par en-dessus, alors les intervalles $(b_n, b_{n+1}]$ partitionnent la demi-droite réelle de zéro ($= b_1$) à plus l'infini. On écrit

$$(0, +\infty) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (b_i, b_{i+1}].$$

Ainsi, a_0 étant un nombre strictement positif, il se trouve nécessairement dans l'un de ces intervalles. Cela conclut la preuve de l'existence. Or, comme les intervalles sont disjoints, cela montre également l'unicité.

Il se pourrait que la suite $b_1, b_2, \ldots$ soit bornée par en-dessus par un entier strictement inférieur à a_0, au quel cas l'existence désirée ne serait pas vérifiée. Or, dans ce cas, on pourrait écrire

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_0 \\ &= (a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \ldots + (a_n - a_1). \end{aligned}$$

L'argument de la première solution implique que $b_n \geq n - 1$ et la suite $b_1, b_2, \ldots$ n'est donc pas bornée. □

1.2 Un deuxième exemple

Exemple 2 *maybe ?*

2 Un peu de théorie

Définition 2.1 Une *suite* est une collection ordonnée, en général infinie ou semi-infinie, de nombres. Par exemple de nombres naturels, entiers ou réels. On notera $(x_n)_{n \geq a}$ pour une suite (semi-infinie) indexée à partir de $a \in \mathbb{Z}$ et $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ pour une suite (infinie) indexée sur $\mathbb{Z}$.

Remarque *Observer qu'une suite de nombres $(x_n)_{n \geq 1}$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \ldots$ vers l'ensemble approprié. De même, une suite $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ n'est rien d'autre qu'une fonction des nombres entiers $\mathbb{Z}$.*

La remarque précédente signifie qu'un problème de suites peut être reformulé comme un problème d'équations fonctionnelles où les fonctions qui nous intéressent sont définies sur les nombres entiers. Malgré ces similarités au niveau de la formulation et des objets étudiés, ces deux catégories de problèmes, suites et équations fonctionnelles, sont différentes en nature. Un problème de suite insiste en général sur le comportement inductif des indices ($x_n \rightsquigarrow x_{n+k}$), alors qu'une équation fonctionnelle met en évidence les itérations d'une fonctions (en incluant des termes du type $f(f(x))$).

2.1 Le jargon et quelques résultats de base

Nous commençons par définir quelques termes de base du jargon des suites.

Définition 2.2 Une suite (x_n) est:

- *(strictement) croissante* si
$$x_{n+1} \overset{(>)}{\geq} x_n, \quad \forall n.$$
- *(strictement) décroissante* si
$$x_{n+1} \overset{(<)}{\leq} x_n, \quad \forall n.$$
- *constante* s'il existe un nombre c tel que
$$x_n = c, \quad \forall n.$$
On note $x_n \equiv c$.
- *périodique* si il existe un nombre entier $k \geq 1$ tel que
$$x_{n+k} = x_n, \quad \forall n.$$
Le plus petit tel k est appelé la *période* de (x_n).

Exemple 3 *Les suites suivantes sont périodiques.*

1. *Les suites constantes sont périodiques de période 1.*
2. *La suite* $x_n := (-1)^n$ *est périodique de période 2.*
3. *La suite* $x_n := \sin(\frac{2\pi n}{m})$ *est périodique de période* m*.*

Une propriété pratique est la suivante. La preuve est laissée en exercice.

Lemme 2.1 *Une suite (dé)croissante qui est périodique est nécessairement constante.*

Définition 2.3 Une suite (x_n) est *bornée par en-dessous* s'il existe un nombre réel A tel que
$$A \leq x_n, \quad \forall n$$
et *bornée par en-dessus* s'il existe un nombre réel B tel que
$$x_n \leq B, \quad \forall n.$$

Elle est *bornée* si elle est bornée à la fois par en-dessus et par en-dessous. Les nombres A et B sont appelés des *bornes* (les bornes ne sont évidemment pas uniques).

Par exemple, une suite de nombres (strictement) positifs est par définition bornée par en-dessous. Pour aller plus loin dans cette idée, on peut définir *bornée* de manière équivalente en exigeant l'existence d'un nombre réel M tel que $|x_n| \leq M, \forall n$. En effet, par définition de la valeur absolue,

$$|x_n| \leq M \quad \Longleftrightarrow \quad -M \leq x_n \leq M.$$

La propriété d'être bornée est reliée aux propriétés de (dé)croissance par le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Une suite bornée par en-dessus/en-dessous et croissante/décroissante converge.*

On ne va volontairement pas rentrer dans les détails techniques de la définition de convergence dans ce script. La notion intuitive de convergence est suffisante pour les problèmes olympiques. Par exemple, les suites constantes sont convergentes. La suite $x_n := 1/n$ converge vers 0. La suite $x_n := n^2$ diverge vers plus l'infini. La suite $x_n := (-1)^n$ n'est pas convergente.

Intuitivement, une suite croissante, représentée dans un système d'axes, ne peut que "monter". Si elle est bornée par en-dessus, alors il existe un plafond qu'elle n'est pas autorisée à dépasser. Ne pouvant pas redescendre, la suite va "converger" vers une valeur en-dessous du plafond.

Exemple 4 *Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels telle que* $x_1 = 2$ *et*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Trouver une expression explicite pour x_n.

Solution. On commence par calculer les premiers de termes de la suite. Cela permettra de mettre évidence certaines propriétés de la suite. On calcule

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3/2 = 1.5, \quad x_3 = 17/12 \sim 1.42, \ldots$$

On remarque que la suite parait rester positive, malgré une certaine décroissance. Montrons tout d'abord que la suite (x_n) est une suite de nombres strictement positifs. En effet, par induction, $x_1 > 0$ et $x_{n+1} > 0$ si $x_n > 0$.

En allant un peu plus loin, on remarque que

$$x_n \geq \sqrt{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

En effet, par induction, $x_1 = 2 > \sqrt{2}$ et en utilisant AM-GM, comme $x_n > 0$, on obtient

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x_n}{2} \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire de l'éventuelle (dé)croissance de la suite ? Une petite inspection montre que la suite est décroissante. En effet, comme $x_n \geq \sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{x_n}{2} = x_n.$$

La suite (x_n) étant décroissante et bornée par en-dessous, elle est donc convergente. Comment déterminer la valeur vers laquelle la suite converge ? L'astuce est la suivant: à la limite, lorsque l'indice n est très grand, on a "$x_{n+1} = x_n$" parce que la suite converge. Si on dénote par x la limite de la suite (x_n), alors, en supposant $x_{n+1} = x_n = x$, on a

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad \iff \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Comme $x_n \geq \sqrt{2}$, on a $x = \sqrt{2}$.

Pour simplifier la notation, parce que l'on préfère travailler avec suites qui convergent vers zéro, on pose $y_n := x_n - \sqrt{2}$. La condition initiale devient

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+1} - \sqrt{2} \\
&= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} \\
&= \frac{y_n + \sqrt{2}}{2} + \frac{1}{y_n + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \\
&= \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})}.
\end{aligned}$$

L'astuce algébrique intervient à présent. On reconnait en le terme $2(y_n+\sqrt{2})$ un semblant de double produit qui pourrait s'associer au terme y_n^2. Il manque cependant un facteur $2\sqrt{2}$. En l'ajoutant, on obtient

$$y_{n+1} + 2\sqrt{2} = \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})} + 2\sqrt{2} = \frac{(y_n + 2\sqrt{2})^2}{2(y_n + \sqrt{2})}.$$

En contemplant les deux dernières expressions, on remarque un schéma inductif. Plus précisément,

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1} + 2\sqrt{2}} = \frac{y_n^2}{2(y_n + \sqrt{2})} \cdot \frac{2(y_n + \sqrt{2})}{(y_n + 2\sqrt{2})^2} = \left(\frac{y_n}{y_n + 2\sqrt{2}}\right)^2.$$

C'est gagné! Une telle formule inductive est trop esthétique pour ne pas être la clé du problème. Comme $y_1 = 2 - \sqrt{2}$, on peut écrire

$$\frac{y_{n+1}}{y_{n+1} + 2\sqrt{2}} = \left(\frac{y_n}{y_n + 2\sqrt{2}}\right)^2 = \ldots = \left(\frac{y_1}{y_1 + 2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}.$$

En revenant à la suite (x_n), on obtient

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

qui nous permet d'isoler x_{n+1} et de conclure. □

2.2 Suites arithmétiques et géométriques

Deux grandes familles de suites sont présentées dans les exemples suivants.

Exemple 5 (Suites arithmétiques) *Une suite (x_n) (infinie ou semi-infinie) est* arithmétique *s'il existe un nombre r, appelé* raison*, tel que $x_{n+1} = x_n + r$ pour tout n. En français, chaque élément de la suite est obtenu à partir du précédent en ajoutant r. Montrer que si (x_n) est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$x_n = x_0 + nr, \quad \forall n.$$

Solution. Nous raisonnons évidemment par induction. Si $n = 0$, le résultat est clair. Supposons à présent que le résultat est vérifié pour n et montrons le pour $n + 1$. Par définition et en utilisant l'hypothèse d'induction,

$$x_{n+1} = x_n + r = (x_0 + nr) + r = x_0 + (n + 1)r.$$

Si la suite est indexée sur $\mathbb{Z}$, alors, de même, on peut montrer que si la conclusion est vérifiée pour n, alors elle l'est aussi pour $n - 1$. □

Selon la valeur de la raison, une suite arithmétique satisfait les propriétés suivantes:

- si $r = 0$, alors la suite est constante.
- si $r \neq 0$, alors la suite diverge vers l'infini. Plus précisément, si $r > 0$, alors la suite diverge vers plus l'infini, et si $r < 0$, alors la suite diverge vers moins l'infini.

Exemple 6 (Suites géométriques) *Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est* géométrique *s'il existe un nombre r, appelé* raison*, tel que $x_{n+1} = r \cdot x_n$ pour tout $n \geq 0$. En français, chaque élément de la suite est obtenu à partir du précédent en multipliant par r. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$x_n = r^n \cdot x_0, \quad \forall n \geq 0.$$

La solution est inductive tout comme pour les suites arithmétiques.

Si $x_0 = 0$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est constamment nulle. Selon la valeur de la raison, une suite géométrique satisfait les propriétés suivantes. Ici, on suppose que $x_0 \neq 0$.

- si $r = 0$, alors la suite est constamment nulle (excepté x_0 qu'on a supposé non-nul): $x_n \equiv 0$.
- si $r = 1$, alors la suite est constante.
- si $r > 1$ et $x_0 \neq 0$, alors la suite est divergente vers plus ou moins l'infini selon le signe de x_0.
- si $0 < |r| < 1$, alors la suite est convergente vers zéro.

Exemple 7 *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que*

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 3.$$

Trouver toutes les valeurs possibles de x_1 et x_2 telles que la suite (x_n) prenne une valeur entière pour une infinité d'indices n.

Première solution. Soit (x_n) une telle suite. On commence par l'étape des manipulations algébriques. En manipulant l'expression donnée de diverses manières, on obtient tôt ou tard la relation suivante:

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}}.$$

Cette relation met en évidence le rôle joué par l'inverse des x_n. En effet, on a

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Cette expression suggère immédiatement la substitution $y_n := 1/x_n$ qui est valable parce que les x_n sont tous non-nuls. La nouvelle suite (y_n) satisfait la relation clé suivante:

$$y_n + y_{n-2} = 2y_{n-1}.$$

Cette relation implique que la suite (y_n) est une suite arithmétique (cf exercice). On a ainsi deux cas de figure possibles selon la valeur de la raison r de la suite (y_n). Si $r \neq 0$, alors la suite (y_n) est divergente vers plus ou moins l'infini. Si $r = 0$, la suite est constante.

En utilisant que la suite (x_n) est entière pour une infinité d'indices n, on sait que $|x_n| \geq 1$ pour cette même infinité d'indices n (car $x_n \neq 0$ par hypothèse). Pour ces mêmes indices n, on a $|y_n| \leq 1$. Donc, la suite (y_n) ne diverge pas vers l'infini. Elle est donc constante par la remarque précédente.

La suite (x_n) est également constante et cette constante est un nombre entier non-nul. Par conséquent, $x_1 = x_2$ est un nombre entier non-nul.

Inversement, si $x_1 = x_2$ est un nombre entier non-nul, alors $x_n = x_1$ pour tout n et la suite (x_n) prend donc bien des valeurs entières pour une infinité d'indices n. $\square$

Deuxième solution. Soit à nouveau (x_n) une suite qui satisfait les conclusions du problème. Dans cette solution, on commence plutôt par calculer les premiers termes de la suite. On obtient

$$x_3 = \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2},$$

puis

$$x_4 = \frac{x_2 x_3}{2x_2 - x_3} = \frac{x_2 \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2}}{2x_2 - \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2}} = \frac{x_1 x_2}{3x_1 - 2x_2}.$$

On est dès lors tenté de conjecturer que

$$x_n = \frac{x_1 x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2} = \frac{x_1 x_2}{n(x_1 - x_2) + 2x_2 - x_1}.$$

Une simple induction permet de vérifier cette affirmation.

La présence du n au dénominateur de l'expression explicite pour x_n montre que (x_n) converge vers zéro à part si $x_1 = x_2$, au quel cas le n du dénominateur ne joue aucun rôle. Comme la suite (x_n) est par hypothèse jamais nulle, elle ne peut prendre qu'un nombre fini de fois une valeur entière si elle converge vers zéro. On en déduit donc que la suite (x_n) ne converge pas vers zéro et donc $x_1 = x_2$. La fin de la preuve est identique à la solution précédente. □

3 Conclusion

3.1 Trucs et astuces à l'emporter

L'approche suivante est un modèle à adopter pour attaquer un problème de suite.

a.1) **Manipulations algébriques:** Comme dans les exemples précédents, il est bon de commencer par jouer avec l'expression donnée dans le problème, en oubliant le reste de l'énoncé. Manipuler l'expression à foison en essayant de faire apparaitre des motifs inductifs, télescopiques ou toute formule esthétique.

Cette étape est clé et le temps à lui consacrer ne doit pas être négligé. En général, les problèmes ont plusieurs solutions dont une courte et subtile, et une plus technique et plus longue, mais moins astucieuse.

a.2) **Propriétés standards:** On s'intéresse également, dans la phase d'approche, aux éventuelles propriétés satisfaites par la suite donnée dans le problème (par exemple périodicité, (dé)croissance,. . .).

Il est également utile, lorsque qu'une formule inductive est donnée, de calculer explicitement les premiers termes d'une suite. Dans certains cas, on peut même espérer obtenir une formule explicite à partir d'une formule inductive.

b) **Mettre de l'ordre:** En utilisant les observations faites aux points précédents, on peut tenter de simplifier l'expression algébrique à l'aide de substitutions pertinentes (par exemple $y_n := 1/x_n$, $\Delta_n := x_n - x_{n-1}$ ou $y_n := x_n - x$ où x est la limite conjecturée de la suite (x_n)). Une bonne substitution vous permettra d'y voir plus clair.

c) **Se concentrer sur la conclusion:** C'est l'étape ou l'on retourne au problème initial et on essaie de mettre bouts à bouts les éléments obtenus précédemment pour démontrer l'énoncé voulu.

Allez! Encore un dernier exemple pour la route.

3.2 Un dernier exemple

Exemple 8 (OFM 2020, Problem 3) *Let $(x_n)_{n\geq 1}$ be sequence of real numbers such that $x_1 = 3/2$ and*

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Find an integer $k \geq 1$ such that $2020 \leq x_k < 2021$.

Solution. First thing to do is computing some values of the sequence. They may exhibit (or disprove) some properties of the sequence. Here we compute

$$x_1 = 3/2 = 1.5, \quad x_2 = 5/3 \sim 1.67, \quad x_3 = 11/5 = 2.2, \quad x_4 = 26/11 \sim 2.36, \ldots$$

One can guess at this point is that the sequence (x_n) is increasing. However, it does not seem so obvious to prove (for instance by trying a good old induction). Why ? Well, the right-hand side of the initial condition is decreasing in the variable x_n. So, finding a lower bound for the right-hand side is equivalent to finding an upper bound for x_n. Thus in order to conclude that $x_{n+1} > x_n$ one should first bound x_n from above. Some kind of double induction may work. But let's try something else for now.

Looking at the assertion we have to prove, it seems that the sequence (x_n) (conjecturally increasing) is not convergent. More precisely, this suggests to study its **asymptotic behaviour**: how fast do is it grow ? If you think of the index n of the sequence (x_n) as a count of minutes and x_n as the state after n minutes, then the problem asks for the time at which the sequence will be between two given "large" values.

The standard trick to approximate the asymptotic behaviour of (x_n), given the recursive condition in the problem statement, is to let "$x_{n+1} = x_n$" and see what comes out. Be careful! This is a purely heuristic argument and has no value as part of a proof). It simply let you make an educated guess of the asymptotic value. So let $x := x_{n+1} = x_n > 0$, we get

$$x = 1 + \frac{n}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2} = 1/2 + \sqrt{1/4 + n}.$$

Note that the case $x = 1/2 - \sqrt{1/4 + n}$ was excluded because $x > 0$. The conclusion is that we expect (x_n) to behave like $1/2 + \sqrt{1/4 + n}$ when n goes to infinity. We write $x_n \sim 1/2 + \sqrt{1/4 + n}$.

Now you have to realize that the term $1/4$ under the square root has a very little influence on the behaviour at infinity. Indeed, if $n \to \infty$, then the $1/4$ has almost no weight compared to n. More precisely, it is true that

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1/4+n} - \sqrt{n} = 0.$$

So, we expect $x_n \sim 1/2 + \sqrt{n}$ when n goes to infinity.

We could also get rid of the $1/2$ in the sense that $\sqrt{n}$ goes to infinity as n goes to infinity, so the contribution of the $1/2$ is negligible. However, we have to locate some x_k in an interval of length $2021 - 2020 = 1$ and $1/2$ is not negligible compared to 1. So, it is important to keep in mind that the $1/2$ may actually have some importance here. But for simplicity, let's first assume that $x_n \sim \sqrt{n}$. If this leads nowhere, then we will try with the $1/2$ (and if this is still not enough, then we might try with the $1/4$ as well).

What now? If we expect $x_n \sim \sqrt{n}$ when n is large, we could try to use the square root in this estimation to bound x_n from above and below. Looking at the first terms computed above, it seems that the inequality

$$\sqrt{n} \leq x_n \leq 1 + \sqrt{n}$$

holds. Let's try to prove it. By induction, we assume it is true for x_n. For x_{n+1}, we have

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} \leq 1 + \sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1},$$

and

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1}.$$

So, we would like to prove that

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} \geq \sqrt{n+1} \quad \iff \quad n+1+\sqrt{n} \geq (\sqrt{n}+1)\sqrt{n+1}.$$

A cool manoeuvre at this point consists in observing that the above inequality is equivalent to

$$\Big((\sqrt{n}+1) - \sqrt{n+1}\Big)^2 \geq 0.$$

So we proved that

$$\sqrt{n} \leq x_n \leq 1 + \sqrt{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

and actually that

$$\sqrt{n} \leq x_n < 1 + \sqrt{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

So in particular $k = 2020^2$ satisfies the desired conclusion. □

We were lucky with our approach. We guessed the asymptotic behaviour of the sequence and then got rid of some low-contribution terms in order to simplify the computations later on. This was nothing more than a bold bet, maybe motivated by some gut feeling.

The moral here is that you have to try stuff instead of simply being stuck somewhere. **Keep writing, keep trying, always!** If you realize your assumption were not sharp enough, then try with something sharper. And trust your feeling (a.k.a. *experience*), it is always your best friend when sitting an exam.

4 Méthodes supplémentaires

4.1 Récursion explicite

Disclaimer: l'auteur original de ces notes reste à ce jour inconnu.

Dans certains cas spécifiques, il existe des méthodes pour trouver une formule explicite pour une suite définie récursivement. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suites de nombres réels où les k valeurs $x_1, \ldots, x_k$ sont supposées connues et qui est définie par l'équation de récurrence

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad \forall n \geq 1. \tag{3}$$

Les c_i sont ici des constantes. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est uniquement déterminée par les informations ci-dessus. Cela signifie que si l'on trouve une expression pour x_n qui satisfait la relation ci-dessus, alors il s'agit de la suite recherchée. Pour ce genre suite, définie par une relation de récurrence linéaire en les variables x_n, il existe une méthode pour trouver une formule explicite pour la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

On introduit tout d'abord, de manière purement formelle, le *polynôme caractéristique* $P(\lambda)$ de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ en remplaçant les termes x_n par λ^n dans la relation (3). On obtient

$$P(\lambda) := \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0.$$

Remarquer qu'on a simplifié par λ^n. L'idée est la suivant. Si l'on connait les zéros du polynômes caractéristiques, i.e. les nombres λ pour lesquels $P(\lambda) = 0$, alors on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui satisfait la relation désirée.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les zéros (complexes) distincts de $P(\lambda)$ avec leurs multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r \geq 1$. Noter que $m_1 + \ldots + m_r = n$. Pour $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$, on introduit la *solution fondamentale*

$$F_{i,j}(n) := n^j \cdot \lambda_i^n.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est une combinaison linéaire des solutions fondamentales. En effet

Théorème 4.1 *Il existe des constantes (complexes) $C_{i,j}$ tels que*

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{i,j} \cdot F_{i,j}(n), \quad \forall n \geq 0.$$

Les coefficients $C_{i,j}$ sont uniquement déterminées par les valeurs $x_1, \ldots, x_k$ qu'on a supposées connues. Ces valeurs fournissent un système linéaire de k équations en k variables

$C_{i,j}$. Ce que l'on peut résoudre. En pratique, la valeur de k n'est jamais trop élevée, ce qui permet de résoudre le système sans trop de problème.

Exemple 9 *La* suite de Fibonacci *est définie par* $F_0 = 0, F_1 = 1$ *et par la formule de récurrence* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *pour* $n \geq 0$. *Trouver une formule explicite pour* $(F_n)_{n\geq 0}$.

Solution. Le polynôme caractéristique de la suite de Fibonacci est $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Les deux zéros du polynôme sont $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ et ils sont les deux de mulltiplicité 1. Les deux solutions fondamentales sont par conséquent $((1+\sqrt{5})/2)^n$ et $((1-\sqrt{5})/2)^n$. Nous obtenons ainsi une formule de la forme

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Les constantes C_1, C_2 peuvent être déterminées à l'aide des valeurs $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Le système d'équations suivant doit être satisfait:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $C_1 = 1/\sqrt{5}$ et $C_2 = -1/\sqrt{5}$, ce qui nous amène à la formule de Binet bien connue:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

□

Exemple 10 *La* suite de Lucas *ressemble à celle de Fibonacci. Elle est définie par* $L_1 = 1, L_2 = 3$ *et la formule de récurrence* $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ *pour* $n \geq 1$. *Trouver une formule explicite pour la suite* $(L_n)_{n\geq 1}$.

Solution. Pour simplifier les calculs, il est utile de poser $L_0 := 2$. Cela est consistant par rapport à l'équation de récurrence. La suite de Lucas et celle de Fibonacci ont la même équation de récurrence et par conséquent les mêmes solutions fondamentales. Il n'y a que les constantes qui changent. Le nouveau système d'équations est

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2, \\ 1 &= C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Les solutions sont $C_1 = C_2 = 1$, ce qui entraîne

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

□

Remarque (Fun fact of the day) *On peut obtenir beaucoup de résultats spectaculaires à partir des expressions explicites que l'on vient de trouver. Un exemple plutôt anodin est la formule de limite bien connue pour la suite de Fibonacci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Le terme de droite s'appelle le nombre d'or. *Il apparaît de façon très naturelle dans les problèmes d'emplacement optimal. Cela explique peut-être pourquoi la suite de Fibonacci est aussi omniprésente dans la nature (comptez par exemple le nombre de spirales d'une pomme de pin ou les spirales dans une fleur de tournesol).*

Dans l'exemple suivant, le polynôme caractéristique possède des zéros multiples:

Exemple 11 *Deux suites* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *satisfont les équations suivantes:*

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2}, \\ b_n + b_{n-2} &= 3(a_{n-1} + a_{n-3}), \end{aligned}$$

ainsi que $a_0 = a_1 = 1$ *et* $b_2 = b_3 = 4$. *Trouver une formule explicite pour* $(a_n)_{n\geq 0}$.

Solution. En introduisant la première équation dans la deuxième, nous obtenons

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4} = 0, \quad \forall n \geq 4.$$

Le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$ admet le zéro double $\lambda = 1$ et les deux zéros complexes conjugués $\lambda = \pm i$. D'après la proposition 1, il existe des constantes C_1, C_2, C_3, C_4 telles que

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot i^n + C_4 \cdot (-i)^n.$$

En partant des valeurs initiales données et de la première équation en haut, nous obtenons facilement $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$. Cela nous donne le système d'équations

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_3 + C_4 \\ 1 &= C_1 + C_2 + iC_3 - iC_4 \\ 2 &= C_1 + 2C_2 - C_3 - C_4 \\ 1 &= C_1 + 3C_2 - iC_3 + iC_4 \end{aligned}$$

avec les solutions $C_1 = 2$, $C_2 = -1/2$, $C_3 = (-2+i)/4$ et $C_4 = (-2-i)/4$. En remplaçant ces valeurs dans la formule ci-dessus, on obtient

$$a_n = \begin{cases} 1 - n/2 & n \equiv 0 \pmod 4 \\ 3/2 - n/2 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ 3 - n/2 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ 5/2 - n/2 & n \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

□

Cet exemple met en lumière le fait que même si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est clairement réelle, il se peut qu'il y ait des nombres complexes dans la formule explicite. Toutefois si l'équation de récurrence n'a que des coefficient réels, alors les zéros complexes du polynôme caractéristique apparaissent toujours accompagnés de leurs conjugués, ce qui est par conséquent le cas pour les termes complexes de la formule explicite également. Si les valeurs initiales sont réelles, alors les coefficients correspondants sont également conjugués et en effectuant les transformations adéquates on arrive à faire disparaître les parties imaginaires de la formule. Il ne reste que des nombres réels. Ceci peut être démontré, mais pour vous il suffit de le savoir. Dans la plupart des applications il devient vite clair comment certains termes se simplifient.

Voici maintenant une véritable application. On peut utiliser la méthode qu'on vient de développer pour résoudre une équation fonctionnelle en une variable qui ne contient que des itérations pures de la fonction f.

Exemple 12 *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tout $x > 0$*

$$f(f(x)) + f(x) = 2x.$$

Solution. Soit f une solution de l'équation. Soit $a > 0$ un nombre arbitraire. Définissons une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_0 := a$ et $x_{n+1} := f(x_n)$. Nous avons alors, par hypothèse, l'équation de récurrence

$$x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_n.$$

Le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$ admet les zéros 1 et -2. Il existe donc des constantes C_1 et C_2 avec

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-2)^n.$$

Comme f ne prend que des valeurs positives, tous les termes x_n de la suite doivent être positifs. Si on avait $C_2 \neq 0$, alors il y aurait des n très grands pour lesquels le côté droit de la formule serait négative, contradiction. Par conséquent $C_2 = 0$ et $x_n = C_1$ pour tout n. Comme$x_0 = a$, on obtient $f(a) = a$. Comme a était arbitraire, on a montré que f était la fonction identité. □

Une représentation explicite peut donc souvent être utile. L'opération inverse est cependant tout aussi importante. Il y a souvent des termes qui font penser à certaines formules explicites de suites définies récursivement. A l'aide de l'équation de récurrence, nous pouvons parfois démontrer des assertions concernant la divisibilité et autres sujets semblables. En voici maintenant un exemple.

Exemple 13 *Existe-t-il un nombre naturel impair n tel que $\lfloor (2+\sqrt{5})^n \rfloor$ soit divisible par 99?*

Solution. L'expression donnée sous cette forme ne convient pas du tout à des considérations de divisibilité. Pour des raisons de symétrie, on pourrait considérer à la place l'expression

$$a_n := (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n. \tag{4}$$

Nous allons montrer que a_n est toujours un nombre entier. Comme $0 > 2-\sqrt{5} > -1$, il s'ensuivra directement que pour un n *impair*, nous avons

$$\lfloor (2+\sqrt{5})^n \rfloor = (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n.$$

L'expression (4) fait penser à la formule explicite d'une suite définie récursivement. Nous allons maintenant reconstruire cette formule de récurrence. Le polynôme caractéristique doit admettre les deux zéros $2 \pm \sqrt{5}$, nous avons donc

$$P(\lambda) = (\lambda - 2 - \sqrt{5})(\lambda - 2 + \sqrt{5}) = \lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

La formule de récurrence est par conséquent

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n.$$

Nous avons de plus $a_0 = 2$ et $a_1 = 4$. Par conséquent, a_n est entier pour tout $n \geq 0$.

Nous devons encore décider si il existe un entier n tel que a_n peut être divisible par 99. Pour cela nous allons considérer la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ modulo 9 et modulo 11. Un calcul rapide nous donne les périodes minimales

$$a_n \equiv 2,4,0,4,7,5,0,5 \pmod 9, \quad a_n \equiv 2,4,7,10,3,0,3,1,7,7 \pmod{11}.$$

Il s'ensuit que

$$9 \,|\, a_n \Leftrightarrow n \equiv 2,6 \pmod 8 \quad \text{and} \quad 11 \,|\, a_n \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{10}.$$

Ces deux congruences ne sont jamais satisfaites en même temps, par conséquent a_n n'est jamais divisible par 99. □