MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Suites

Actualisé: 1er août 2021
vers. 1.2.0

## 1 Exercices

### Mise en jambes

1.1 Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrer que si

- $x_n + x_{n-2} = 2x_{n-1}, \forall n \geq 3$, alors $(x_n)$ est une suite arithmétique.
- $x_n \cdot x_{n-2} = x_{n-1}^2, \forall n \geq 3$, alors $(x_n)$ est une suite géométrique.

1.2 Montrer qu'une suite (dé)croissante qui est périodique est nécessairement constante.

1.3 Trouver toutes les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels telles que $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ et

$$x_{n+1} = x_{n-1}^2 - n \cdot x_n, \quad \forall n \geq 1.$$

1.4 Trouver toutes les valeurs réelles que peut prendre $a$ telle que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_1 = a$ et

$$x_{n+1} = (x_n - 3)(x_n - 5) + 4, \quad \forall n \geq 1$$

soit bornée.

1.5 Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite géométrique de nombres réels. Montrer que les suites $(y_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$y_n := \sqrt{x_{n+1}x_n}, \quad \forall n \geq 1,$$

et

$$z_n := \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad \forall n \geq 1,$$

sont aussi des suites géométriques de même raison que la suite $(x_n)$.

1.6 Soient $x_n := 1 + \ldots + 1/n$ et $y_n := 1 + \ldots + 1/n^2$. Monter que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et n'est pas bornée par en-dessus. Elle est donc divergente. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et bornée par en-dessus. Elle est donc convergente.

### Avancé

1.7 (Tour final 2019) Trouver toutes les suites périodiques $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right), \quad \forall n \geq 1.$$

1.8 (MEMO 2013) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres entiers telle que $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{2} + x_n + x_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Trouver tous les nombres premiers $p$ pour lesquels il existe un indice $m$ avec

$$p \,|\, x_m - 1.$$

1.9 (Examen blanc 2019) Soit $x_0, \ldots, x_k$ une suite finie de nombres réels telle que $x_0 = 1/2$ et

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{k}, \quad n = 0, \ldots, k-1.$$

Monter que $k/(k+1) < x_k < 1$.

1.10 Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $x_1 = 2$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Monter que

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$

### Olympiade

1.11 (IMO 2015) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs telle que

$$x_{n+1} \geq \frac{n \cdot x_n}{x_n^2 + n - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Montrer que $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ pour tout $n \geq 2$.

1.12 (IMO 2018) Soit $x_1, \ldots, x_k$ une suite finie de nombres réels telle que

$$x_{n+2} = x_{n+1}x_n + 1, \quad \forall n = 1, \ldots, k,$$

où $x_{k+1} = x_1$ et $x_{k+2} = x_2$. Déterminer tous les entiers $k \geq 1$ tels qu'une telle suite existe.

1.13 (Shortlist 2017) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que

$$x_n = -\max_{i+j=n}(x_i + x_j), \quad \forall n > 2017.$$

Montrer que la suite $(x_n)$ est bornée.

## 2 Solutions guidées

Dans cette section, on propose de résoudre certains problèmes plutôt corsés par étape. Vous êtes bien entendus invités à tout d'abord essayer le problème sans lire les différentes étapes.

**Olympiade**

2.1 (IMO 2018) Soit $x_1, \ldots, x_k$ une suite finie de nombres réels telle que

$$x_{n+2} = x_{n+1}x_n + 1, \quad \forall n = 1, \ldots, k,$$

où $x_{k+1} = x_1$ et $x_{k+2} = x_2$. Déterminer tous les entiers $k \geq 1$ tels qu'une telle suite existe.

1. Deviner la solution et trouver une construction.
2. Solution astucieuse: effectuer un calcul double sur le terme $x_k x_{k+1} x_{k+2}$. Conclure.
3. Solution standard: étudier la positivité des termes de la suite. Conclure.

2.2 (IMO 2015) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs telle que

$$x_{n+1} \geq \frac{n \cdot x_n}{x_n^2 + n - 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Montrer que $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ pour tout $n \geq 2$.

1. Comme dans beaucoup de problèmes de suites, l'expression donnée parait très artificielle. Commencer par jouer avec l'expression jusqu'à faire apparaitre quelque chose de sympa. Un comportement inductif ou télescopique, peut-être ?
2. Montrer que $x_1 + \ldots + x_n \geq \frac{n}{x_{n+1}}$.
3. Distinguer deux cas et conclure.

2.3 (CMC 2020) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2}{n+1}}$$

Montrer que la suite est constante.

1. Soient $A_n$ et $Q_n$ les moyennes arithmétiques et géométriques des $n$ premiers termes de la suite. Montrer que les suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(Q_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes.
2. Reformuler la conclusion à l'aide de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ ou $(Q_n)_{n\geq 1}$.
3. **Idée centrale:** calculer la différence $Q_n^2 - A_n^2$ et exprimer là de manière concise.
4. Fixer $k < n$ et trouver une borne inférieure pour $Q_n^2 - A_n^2$ de la forme $f(n,k)(a_k - a_1)^2$ où $f(n,k)$ se comporte asymptotiquement comme $1/n$ (et pas seulement $1/n^2$).
5. Rappelez-vous que $\sum_{n\geq k} 1/n$ diverge pour tout entier $k$ (alors que $\sum_{n\geq k} 1/n^2$ est convergente !). Conclure.

## 3 Récursion explicite

3.1 Soit $F_n$ la suite de Fibonacci et $L_n$ la suite de Lucas. Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n} L_{2^k} = F_{2^{n+1}}.$$

3.2 (IMO 79) Soient $A$ et $E$ deux sommets opposés d'un octogone régulier. Une grenouille part de $A$ et saute de chaque sommet sauf $E$ à un sommet voisin. Si elle arrive en $E$, elle arrête de sauter. Soit $a_n$ le nombre de chemins différents de $A$ en $E$ de longueur $n$. Montrer que $a_{2n-1} = 0$ et

$$a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

3.3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tout $x > 0$,

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) + f(x) = 3x.$$

Généraliser.

3.4 (IMO 80) Déterminer le premier chiffre avant et après la virgule dans la représentation décimale de

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{1980}.$$

3.5 Déterminer la plus grande puissance de deux qui divise

$$\left\lfloor (1+\sqrt{3})^n \right\rfloor.$$

3.6 (Shortlist 88) Soit $b$ le plus grand zéro réel du polynôme $x^3 - 3x^2 + 1$. Montrer que $\lfloor b^{1788} \rfloor$ et $\lfloor b^{1988} \rfloor$ sont les deux divisibles par 17.