Polynome - Aufgaben

Aktualisiert: 18. April 2018
vers. 1.0.0

1 Grundlagen

Koeffizienten

Einstieg

Teilbarkeit

1.1 (Indien 89) Zeige, dass das Polynom $x^4 + 26x^3 + 52x^2 + 78x + 1989$ irreduzibel ist über $\mathbb{Z}$.

1.2 Wenn a nicht durch 5 teilbar ist, dann ist das Polynom $x^5 - x + a$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$.

ggT und kgV

Nullstellen

1.3 (CH 05) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass sich das Polynom $(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2)\dots(x^2 - n^2) + 1$ nicht als Produkt von zwei nichtkonstanten Polynomen mit ganzen Koeffzienten schrei- ben lässt.

1.4 (Tschechien 2000) Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffzienten. Zeige, dass das Polynom $Q(x) = P(x)P(x^2)P(x^3)P(x^4) + 1$ keine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

1.5 (CH 2000) Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n, für das gilt $P(k) = \frac{k}{k+1}$ für $k = 0, 1, \dots, n$. Finde $P(n + 1)$.

2 Symmetrische Polynome

Elementarsymmetrische Polynome

2.1 (CH 03) Für die rellen Zahlen x, y, a gelten die folgenden Gleichungen: $x + y = a, x^3 + y^3 = a, x^5 + y^5 = a$. Bestimme alle möglichen Werte von a.

2.2 Für die reellen Zahlen a, b, c gilt $a+b+c > 0, ab+bc+ca > 0$ und $abc > 0$. Zeige, dass $a, b, c > 0$.

2.3 Zeige, dass sich das Polynom $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1)$ als Produkt von zwei nichtkonstanten symmetrischen Polynomen schreiben lässt.

2.4 Finde alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x+y+z = 0$ gilt

$$\left(\frac{x^a + y^a + z^a}{a}\right)\left(\frac{x^b + y^b + z^b}{b}\right) = \left(\frac{x^c + y^c + z^c}{c}\right).$$

Der Satz von Vieta

2.5 (CH 04) Für die rellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}, \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}}, \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

2.6 (Ungarn 83) Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ ein Polynom mit positiven reellen Koeffzienten. Nehme an, P habe n reelle Nullstellen. Zeige, dass gilt

$$P(2) \geq 3n.$$

2.7 (IMO 88) Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x - k} \geq \frac{5}{4}$$

erfüllen, eine Vereinigung disjunkter Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervallängen 1988 beträgt.

3 Weitere Aufgaben

3.1 Zeige, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen +1 immer eine Quadratzahl ist.

3.2 Für welche natürliche Zahlen n gilt

$$x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1?$$

3.3 (USA 74) Seien a, b, c drei verschiedene ganze Zahlen und P ein Polynom mit ganzen Koeffzienten. Zeige, dass die drei Gleichungen

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

nicht alle gelten können.

3.4 (IMO 93) Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass das Polynom $x^n + 5x^{n-1} + 3$ irreduzibel ist über $\mathbb{Z}$.

3.5 (USA 77) Finde alle Paare (m, n) von natürlichen Zahlen, für die gilt

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^m \mid 1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}.$$

3.6 (CH 03) Finde alle Polynome $Q(x) = ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffzienten, sodass drei verschiedene Primzahlen p_1, p_2, p_3 existieren mit

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

3.7 (CH 99) Beweise, dass es zu jedem Polynom $P(x)$ vom Grad 10 mit ganzzahligen Koeffzienten eine (in beiden Richtungen) unendliche arithmetische Folge ganzer Zahlen gibt, die keinen der Werte $P(k), k \in Z$ enthält.

3.8 Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $a^2 + b^2$, wenn die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ nur reelle Lösungen besitzt.

3.9 (IMO 02) Finde alle Paare (m, n) von natürlichen Zahlen mit $m, n \geq 3$, sodass für unendlich viele natürliche Zahlen a der Ausdruck

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

eine ganze Zahl ist.

3.10 (IMO 04) Finde alle Polynome P mit reellen Koeffzienten, sodass für alle reellen Zahlen a, b, c mit $ab + bc + ca = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c).$$